物理学最前線

12

大槻義彦 編

時空の安定性

小玉英雄

ワインバーグ-サラム理論

長島順清

クォークマター

宮村　修

共立出版株式会社

刊行にあたって

20世紀の物理学の進歩はめざましい．1年間になされる研究の発展は，19世紀物理学の発展の10年分にも20年分にも匹敵するとさえいわれる．そしてまた，物理学の進歩は間髪を入れず産業に応用され，技術を革新し，市民の生活に大きな影響を与え，それがさらに物理学そのものを発展させる原動力にもなっている．

かくして，たった1年間の物理学の発展にすら，物理学自身追いついてゆけないという悲喜劇が生まれる．物理学会誌にのる多くの解説は，自分の専門とする分野以外さっぱり理解できないというのが現状であろう．もはや物理学者にすら理解できなくなった物理学など，文化として，人類の共通の遺産として，はたして存在価値のあるものであろうか．

もちろん，情報過多の今日，この進歩しすぎる難解な物理学を，やさしく解説しようという試みは山とある．とくに“*Physics Today*”や“*Scientific American*”(邦訳『サイエンス』)，『自然』などはきわめてユニークで意欲的で，それなりに成功しているといえるであろう．しかし，これらはあくまでも雑誌であり，たかだか数ページの内容であるから，最先端の物理学を紹介するには不十分である．一方，最先端の専門書など難解をきわめ，しかもたいてい英文である．

そこで，“物理学の最前線”をとりあげ，十分な分量でやさしく解説する刊行物が望まれる．つまるところ，シリーズ『物理学最前線』は科学雑誌がもつやさしいトピックス解説の手法と，単行本がもつゆとりと専門性をミックスさせ，わが国科学文化に寄与しようというものである．これによって“専門バカ”を生む物理学の体質を改善し，大学・高校などの教員，および専門研究者・エンジニアに最先端の物理学を広め，専門間の交流をうながし，物理学をふたたび豊かな文化の一員に復帰させようというものである．

大槻義彦

目　次

時空の安定性＝小玉英雄

ワインバーグ－サラム理論＝長島順清

クォークマター＝宮村 修

時空の安定性

小玉英雄

1章　序論

現代物理学の基礎理論の一つである一般相対論は，重力を時空の動力学としてとらえる．この特質のために，一般相対論は，重力の万有引力的性格がしばしば時空構造自体の破壊的変化を引き起こすことを予言する．本稿では，このような時空の動力学のカタストロフィックな側面についての研究の現状を紹介する．

1·1　研究の歴史

一般相対論で記述される世界では日常の世界とは全く異なった時空構造が現れることを最初に明らかにしたのは，おそらく，シュヴァルツシルト (Schwarzschild) によるアインシュタイン方程式に対する球対称な真空解の発見である[1)]．この解は，いわゆるブラックホールを表す最も簡単な解で，時空の特異点 (singularity：時空構造が破綻する点) と事象の地平面 (event horizon：情報の一方通行面) というブラックホール解に特有の二大特性を併せ持っていた．さらにこの一見，非常に理想化された状況を表す時空構造が球対称な星の重力崩壊という現象を通して現実に自然界で現れることが，バーコフ (Birkhoff) による球対称真空解の一意性の証明[2)] およびオッペンハイマー (Oppenheimer) らによる数値計算[3)] によって明らかにされた．

これらと並行して，われわれの宇宙全体の振舞いを一般相対論によって調べようという研究も一般相対論の誕生当時から盛んに行われた．その中で，フリードマン (Friedmann) による空間的に一様で等方な膨張宇宙を表す解の発見[4)] は，時空の動力学的性格が宇宙というスケールで重要な役割を果たすこと

を示すとともに，一様で等方な宇宙は，一般に過去にさかのぼると有限な時間で“一点”にまで収縮してしまい，そこで時空構造が破綻する（宇宙の初期特異点）という驚くべき事実を明らかにした．

これら初期の頃の厳密解の研究は，それらのもつ性質，特に時空の特異点の発生が，厳密解のもつ高い対称性によるものなのか，それともアインシュタイン方程式の解の一般的性質であるのか，という疑問を多くの人々にいだかせた．この問題は長い間未解決であったが，1960 年代後半に入って，ペンローズ (Penrose)，ホーキング（Hawking）らにより大域的微分幾何学という現代数学の手法を用いて見事に解決された．彼らは，特異点の発生がアインシュタイン方程式の解の一般的性質であることを示したのである（特異点定理）[5~7].

この定理は物理学者に非常に大きな波紋を投げかけた．ことに特異点の構造とその物理的効果を解明することが急務となった．しかし残念ながら，この問題に対する十分な解答は現在でも得られていない．ただし，部分的解答は得られつつある．その中で最大の成果が，いわゆる正エネルギー定理（positive energy theorem）の証明である[8~13]．この定理は，特異点が事象の地平面に隠される場合には，外部のわれわれにとっては無害であることを保証するものである．

以上の一連の研究は古典的な相対論の枠内で行われたものであるが，1970 年代に入ってパーカー（Parker）による膨張宇宙における場の量子論の研究，特に宇宙膨張による粒子の量子論的生成という現象の発見[14]を契機として，時空構造の量子場への影響の研究がさかんに行われるようになった．それらの成果の中で最も特筆すべきものは，ホーキングによる，ブラックホールの量子効果による蒸発と消滅という現象の発見である[15]．この発見は，量子効果によって時空の動力学的性格が大きく変わることを示すとともに，ブラックホールの蒸発の結果，事象の地平面によっていったん隠されていた時空の特異点が再び外界に顔を出す（裸の特異点：naked singularity）ことを予言し，特異点の扱いに関して新たな問題を提起した．この問題に対する満足のゆく解答は，現在のところ得られていない．ことにホーキング自身はこの発見を契機として，重

力場の量子論を構築する方向へと進んだ.

本稿では，以上の研究の歴史の中で決定的な役割を果たした，**特異点定理，正エネルギー定理，ブラックホールの蒸発**という三つの事柄を中心として，一般相対論における時空の動力学のもつカタストロフィックな側面について解説する.

1·2　記号についての注意

本稿では相対論の習慣に従って，同一式中で2度現れる添字については，特に断らない限り和をとることを暗黙の了解事項とし，和の記号を省略する. また原則としてギリシャ文字は 0〜3 の範囲を，ラテン文字は 1〜3 の範囲を動くものとする. さらに，座標 x^μ に関する微分は $A,_\mu\left(=\dfrac{\partial A}{\partial x^\mu}\right)$ のように略記する.

時空の計量の符号は [$-+++$] とする. また，光速 $c=1$ という単位系を用いる.

2章　一般相対論

読者の多くは，一般相対論の理論形式やその基礎にある時空概念にはあまりなじみがないであろう．そこで本章では，重力の理論としての一般相対論が時空の動力学という形態をとるにいたった経緯を紹介しながら，一般相対論の基本事項を解説しよう．もちろん，このように限られた紙面では，それらは単にさわり程度のものにならざるをえない．詳しくは専門の教科書（例えば参考文献 16～18)）を読んでいただきたい．また，特殊相対論の基本事項は知っているものとする．これらの事柄に習熟している読者は本章を飛ばして読んでもさしつかえない．

2·1　ニュートン理論における時間・空間

時間と空間は自然現象を記述するうえで最も基本的でかつ実用的な形式である．しかし，自然現象のもつ規則性を見いだそうとすると直ちにそれが単なる形式を超えたものであることが明らかになる．例えば，われわれは狂った時計やゴムでできた物差しが実用にならないことをよく知っている．“正確な時計”と“伸び縮みしない物差し”を使って初めて自然界の規則性が見えてくる．

このような時間・空間のもつ単なる記述形式を超えた役割を初めて明確に認識したのはニュートン（Newton）である．彼はこの認識を，いわゆる絶対時間と絶対空間という概念を導入することによって表現しようとした[19]．

絶対時間＝『その本質において，外界とは何ら関係することなく一様に流れ，これを持続と呼ぶことができるもの』

絶対空間＝『その本質においていかなる外界とも関係なく，常に均質であり揺がないもの』

この絶対時間・絶対空間という概念の導入の背景には慣性の法則に対する深い洞察が潜んでいる．われわれが物体の運動を記述しようとすると，まず基準となる物体（例えば地面）と時計を用意する（基準系）．物体の運動はこの基準物体に対する相対位置と時計の読みでもって表される．単に運動を記述するだけならば基準系としてどのようなものを選んでもよい．しかし，慣性の法則は，運動の法則性という視点から見ると特別の基準系——すなわち力が働かない限り，それに対して物体が等速直線運動をする基準系——が存在することを教えている．慣性系と呼ばれるこの特別な基準系の存在は，明らかに物体の属性ではなく，時間・空間の特性と見なされるべきものである．ニュートンはこの時間・空間の力学的特性を表現する手段として，絶対時間・絶対空間という概念を導入したと考えられる．

ここで注意すべきことは，ニュートンの定義における“絶対性”には，“外界の影響を受けない”，“一様ないし均質な（より正確にはユークリッド幾何学的）構造をもつ自立した実体である”，そして特に空間に関して“それが絶対的に静止している”という三つの要素が含まれている点である．これらのうち，最初の二つの要素は，アリストテレス（Aristotle）以来，物質に束縛されていた空間を物質から解放し，諸現象を単純な構造をもつ空間内の物体の運動へと還元するという力学的自然観を形成するうえで決定的な役割を果たした．しかし最後の要素は何ら力学的意味をもっていない．実際，ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f}$ は，どの慣性系に対しても成立する．すなわち一つの系で成立すれば，それに対して一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する別の系へ移っても（ガリレイ変換：$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}t,\ t\to t$）成立している．したがって，どの慣性系が絶対空間に対して静止しているのかは，力学的手段では判別できないことになる．

2·2　特殊相対論——時空統一体

ニュートンの時間・空間概念とそれを基礎とする力学的自然観は，19 世紀までに急速に発展し目覚ましい成果をあげた．しかし，19 世紀後半にはいって電磁現象の研究が進むにつれ，ニュートン力学の自然法則を統一的にかつ単

純明解に表現する理論形式としての側面は急速に色あせてしまった．この困難が，ニュートン力学の基礎とする時間・空間概念そのものに起因するものであることを鋭く見ぬき，電磁現象を含むより広い現象を包括的にかつ単純に記述する新しい理論形式（特殊相対論）を作り上げたのが，アインシュタイン（Einstein）である．

アインシュタインの行ったことは，今から見れば非常に単純で自然なことである．それは，ニュートン力学のもつ不変性——すなわち現象の力学的記述におけるすべての慣性系の同等性——を電磁現象を記述する法則にまで拡張したにすぎない（特殊相対性原理）．しかしそれから導かれた帰結は驚くべきものであった．

特殊相対性原理は，異なった慣性系に付随した時間・空間座標（x^μ），（x'^μ）が非同次ローレンツ変換（ないしポアンカレ変換）

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (x^0 = t,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z) \tag{2.1}$$

で結ばれることを要求する．ここで a^μ は定ベクトル，$\Lambda^\mu{}_\nu$ は次の条件を満たす正則定行列である：

$$\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} : (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

特に，x 軸にそって互いに一定の速度 v で運動する二つの慣性系の間では，この変換は座標の原点を適当に選ぶと

$$t' = \gamma(t - vx),\ x' = \gamma(x - vt),\ y' = y,\ z' = z : \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \tag{2.3}$$

と表される．この表式は，互いに運動する慣性系の間では，同時性は保存されず，時間間隔や空間距離も変化することを表している（図 2.1）．したがって，特殊相対性原理は，ニュートン理論が出発点とした時間と空間の絶対的分離という考え方そのものを放棄することを要求し，各慣性系に付随した，完全に相対的な無限個の時間・空間のみを残すことになる．

もっとも，このような共存する無限個の時間・空間という考え方は非常にわ

かりにくく不便である．そこでミンコフスキー（Minkowski）は，これらをローレンツ変換という糸を使って一つの時空統一体という幾何学的な実体に編み上げることを考えた．まず，異なった慣性系に付随する時間・空間内の点のうち互いにローレンツ変換（2.1）で結ばれるものを同一視する．すると，一つの抽象的な4次元空間が得られる．この4次元空間の2点 x_1, x_2 の“距離”を

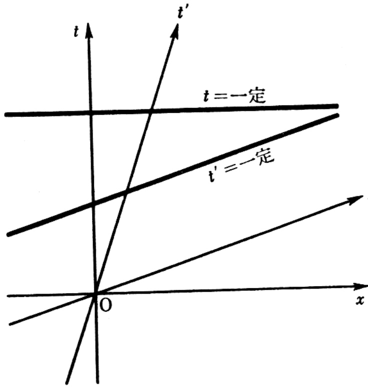


図 2.1　x 軸方向に互いに等速運動する二つの座標系 (t, x), (t', x') の間の関係

$$s^2(x_1, x_2) \equiv \eta_{\mu\nu}(x_2{}^\mu - x_1{}^\mu)(x_2{}^\nu - x_1{}^\nu)$$
$$= -(t_2-t_1)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \tag{2.4}$$

でもって定義すると，ローレンツ変換（2.1）がこの量を不変にするので，式（2.4）はそれを定義するのに用いた慣性系に依存しない距離の定義を与える（ミンコフスキー計量）．このようにして距離の定義された幾何学的4次元空間をミンコフスキー時空と呼ぶ．距離（2.4）を不変にする座標の変換は必ず式（2.1）の形に表される．したがって，ミンコフスキー時空から見ると，各慣性系に付随した時間・空間は，距離がちょうど式（2.4）の形で表されるようなミンコフスキー時空への座標づけと見なすことができる．この対応は幾何学的ユークリッド空間とデカルト座標の対応関係と同じである．

ミンコフスキーのアイデアにより，いったん相対化された時間・空間は再び一つの絶対的な実体へともどった．それと同時に，特殊相対性理論はミンコフスキー時空上での幾何学という非常に見通しのよい表現形式をとるようになった．

2·3　一般相対論

A.　局所慣性系

特殊相対論は，電磁現象を含む古典的な世界を統一的に記述する整合的な理

論形式を与えるとともに，さらに量子論と結合することにより場の量子論という理論形式を生み出した．近年における，電磁，弱，強相互作用という自然界における三つの基本相互作用の場の量子論による統一理論の成功は，その基礎にあるミンコフスキー時空という時空概念のミクロの世界での正当性をゆるぎのないものとして確立した．

このような成功にもかかわらず，自然界のもう一つの基本相互作用である重力を記述できないという点で，特殊相対論は不完全である．この不完全さをなくするためには，もう一度時空概念を修正することが必要となる．

ニュートン理論にしても特殊相対論にしても，その時空概念を構成するうえで慣性系の存在と性質が中心的な役割を果たしていた．重力の理論としての一般相対論において新しい時空概念が必要となる理由は，重力の存在がこれまでの慣性系の概念そのものの変更を要求する点にある．

ニュートン理論における慣性系は理想化されたものではあるが，重力を考えない限り，様々な基準系の中から慣性系を選び出すことが原理的に可能である．例えば，外部電場 $\boldsymbol{E}$ の中で静止している質量 m，電荷 q の物体を考えると，この物体のかってな基準系Oに対する加速度 $\boldsymbol{a}$ は，O′ の慣性系に対する加速度を $\boldsymbol{A}$ として

$$m\boldsymbol{a}=q\boldsymbol{E}-m\boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

で与えられる．一般に比電荷 q/m は物体によっ異なるために，$\boldsymbol{A}\neq 0$ の系で

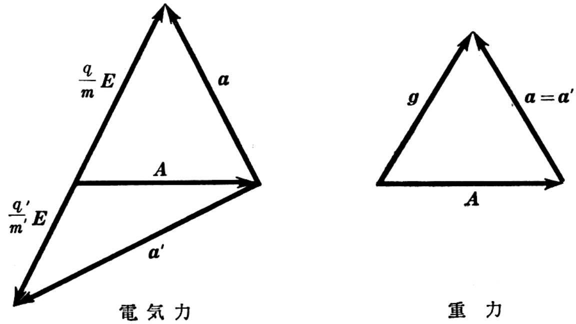


図 2.2

は見かけの力 $\boldsymbol{ma}$ の方向が物体ごとに異なって見える（図 2.2 参照）．したがって $\boldsymbol{ma}$ の方向が物体によらない系として慣性系を選び出すことができる．

ところが，重力に対しては状況が異なる．m_g を物体の重力質量，$\boldsymbol{g}$ を重力加速度とすると，重力場中での $\boldsymbol{a}$ の方程式は式（2.5）で $q\boldsymbol{E}\longrightarrow m_g\boldsymbol{g}$ と置き換えることによって得られる．慣性質量＝重力質量という経験事実を利用するとこの式は

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A} \tag{2.6}$$

と物体の種類に依存しない形になってしまう．われわれはどのような物体を利用しようと常に $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A}$ という組み合わせを観測するのみで，それを $\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{A}$ に分解することはできない．したがって“力が全く作用しないとき物体が直線運動をする系”という従来の慣性系の定義は，ニュートンの“絶対的に静止した空間”と同様に観測的意味を失ってしまう．

われわれはニュートン的慣性系に代わるものを探さねばならない．残された唯一の可能性は，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{A}$ となる系，すなわち，“重力以外の力が働かないときに物体が直線運動をする”系を新しい慣性系の定義として採用することである．このような系は，上の電気力の考察からわかるように観測的に選別可能である．

この新しい定義には，従来のものと大きく違った性質が隠されている．それはこの新たな系が時空内で局所的にしか存在しないことである．このことは，例えば地球の作る重力場を考えてみると容易にわかる．この場合，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{A}$ となる系は自由落下するエレベーターの内部に相当する．明らかにこのエレベーターは有限な時間で地面に激突してしまう．また，エレベーターの内部で完全に重力が消えてしまうには，その大きさは地球の中心からの距離に比べて十分小さくないといけない．そこで，この新しい慣性系を局所慣性系と呼ぶことにする．

これまでニュートン理論の枠内で考えてきたが，局所慣性系の定義を特殊相対論を考慮して修正することは容易である．それには

$$\text{局所慣性系＝特殊相対論の成立する局所系} \tag{2.7}$$

とすればよい．もちろん，局所慣性系の存在はアプリオリには明らかではない．しかし，慣性質量と重力質量が等しいことを示したエートヴェッシュ(Eötvös)の古典的実験はニュートン近似の範囲での局所慣性系の存在を支持している．さらに，特殊相対論の成功は，少なくとも弱い重力場中では式(2.7)の意味での局所慣性系が非常によい精度で存在することを保証している．このような実験事実に基づいてアインシュタインは，局所慣性系の存在を特殊相対論を重力を含む理論に一般化する際の指導原理の一つとして採用した(等価性原理)．

B. 曲がった時空

時間・空間を用いて現象を記述するということは，現象を非常に小さな領域で起こる非常に短い間持続する要素的な現象（事象）に分解し，各事象に時刻と位置という4組の数値を用いてラベルづけすることを意味する．自然界では至る所で常になんらかの事象が起こっているとすると，事象の全体は4次元的な連続体を形作る．自然現象が客観的存在であるとすれば，この連続体は観測者やそれを記述するのに用いる基準系とは独立した実在性をもち，様々な基準系に相対的な時間・空間の背景にある共通の実体を表すと考えられる．この意味で，この4次元連続体を時空連続体（より正確には時空多様体）と呼ぶ．時

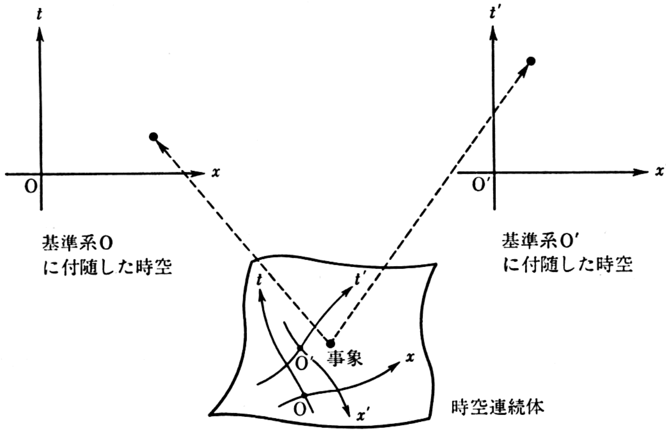


図 2.3

空連続体から見ると，特定の基準系に相対的な時間・空間は，この時空連続体の各点に対する一つのラベルづけ，すなわち座標づけによってでき上がる4組の数の集合と見なすことができる（図 2.3).

§ 2·2 で数学的に構成したミンコフスキー時空は，実はこの時空連続体に相当している．ただし，特殊相対性理論は，それがミンコフスキー計量という特別の計量構造をもつことを要求し，しかも計量が式（2.4）の形をとる座標（ミンコフスキー座標）に特別の役割を与えていた．

等価性原理は，重力場の存在下でも少なくとも局所的には時空連続体がミンコフスキー時空と同じ構造をもつことを保証している．しかし，一般的な重力場のもとでは，慣性系が局所的（原理的には無限小の領域）にしか存在しないために，時空全体の構造はミンコフスキー時空とは異なってくることになる．慣性系の局所性によってもたらされるもう一つの重要な変更は，ミンコフスキー座標のような特別の座標が有限な大きさをもつ領域では存在しなくなることである．このために，時空連続体の構造を一般的な基準系に対する時空座標（一般座標）を用いて記述しなければならない．その結果として，特に式（2.4）のようにかってな2点の距離という形で時空構造を表すことは便利でなくなり，限りなく近い隣り合った2点を結ぶ線分の長さ（線素）によって記述することが必要となる．

$\{x^\mu\}$ を時空の一般座標とすると，ある点（x^μ）を始点とする微小線分 $\mathrm{d}x^\mu$ の長さ $\mathrm{d}s$ は，一般的に

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{2.8}$$

で与えられる．$g_{\mu\nu}$ は一般には x^μ に依存する．この長さが座標に無関係な時空の計量を与えるとすると，二つの座標 $\{x^\mu\}$, $\{x'^\mu\}$ における $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ は，変換

$$g_{\mu\nu}'(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\,g_{\alpha\beta}(x) : x \longrightarrow x' \tag{2.9}$$

で結ばれる．$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれる．

時空が局所的にミンコフスキー時空と同等であることは，各時空点の（無限小の）近傍では $g_{\mu\nu}$ を $\eta_{\mu\nu}$ に移すような特別な座標が存在することを要求し

ている．一般座標の一次変換によって $g_{\mu\nu}$ は，与えられた1点では常に0ないし ±1 を成分としてもつ対角行列に変換されるので，この要求は，$g_{\mu\nu}$ が正則行列で signature（すなわち固有値の符号）が（－＋＋＋）であるという条件で表される．この条件を満たす計量をもつ時空連続体を一般にローレンツ時空と呼ぶ．

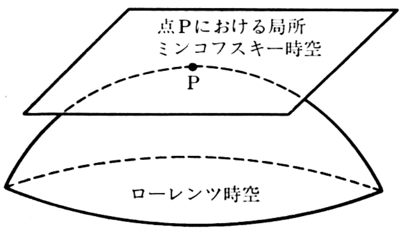


図 2.4

一般の重力場の存在下では，慣性系が局所的にしか存在しないために，時空全体で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ となる座標は存在しない．この状況は，例えば球面の計量が球面内に張られたどのような座標を用いても平面の計量と同じ形に書けないのと同じである．したがって，重力場の存在によって時空は“曲げられる”ことになる（図 2.4).

このような大域的な側面を別にすれば，計量の意味はミンコフスキー時空との対応から容易に得られる．特に $ds^2=0$ は光線の進む方向を与え，その全体は各点に3次元の光円錐を定義する．この光円錐によって時空の各点の近傍は未来と過去およびその点と空間的な関係にある領域の三つの部分に分けられる（図 2.5 参照)．未来と過去の方向（時間的方向）に対しては ds^2 は負となり，$d\tau=\sqrt{-ds^2}$ がその点を通過する粒子の固有時の進みを与える．一方，残りの方向（空間的方向）に対しては ds^2 は正となり，ds は線分の空間的長さを表す．

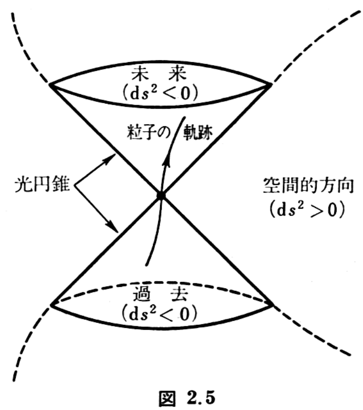


図 2.5

C. 一般共変性原理

前A項で見たように，等価性原理を仮定すると，重力場の存在はミンコフスキー時空の上に構成された特殊相対論を，曲がったローレンツ時空へと一般化

することを要求する．この一般化の方法として，アインシュタインはミンコフスキーにならって幾何学化の道を選んだ．すなわち，重力場の効果はローレンツ計量 $g_{\mu\nu}$ によって完全に表現され（計量仮説），すべての物理量と物理法則は，ローレンツ時空上の幾何学的量とその関係式として表現されるということを指導原理として仮定したのである．この後半の仮定は，物理法則がどの一般座標のもとでも同一の形をとること（一般共変性）と同等である．

この指導原理に従うと，ミンコフスキー時空の時間的直線がミンコフスキー計量に関する最長線（ユークリッド空間と違い計量が定符号でないため最短線でなく最長線となる）で与えられることに着目して，自由な粒子の運動は測地線

$$\delta\int d\tau \equiv \delta\int[-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu]^{1/2}=0 \tag{2.10}$$

で与えられるとするのが自然である．この変分方程式は次の微分方程式を与える：

$$\frac{Du^\mu}{d\tau}\equiv\frac{du^\mu}{d\tau}+\left\{ {\mu \atop \nu\lambda} \right\}u^\nu u^\lambda=0 : u^\mu\equiv\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.11}$$

ここで $\left\{ {\mu \atop \nu\lambda} \right\}$ はクリストッフェル（Christoffel）記号と呼ばれ

$$\left\{ {\mu \atop \nu\lambda} \right\}\equiv\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda}+g_{\alpha\lambda,\nu}-g_{\nu\lambda,\alpha}) \tag{2.12}$$

で定義される．特殊相対論の運動方程式と比較すると，この式は $\left\{ {\mu \atop \nu\lambda} \right\}$ が重力の強さを，$g_{\mu\nu}$ がそのポテンシャルを表すと解釈できることを表している．実際，重力場が十分弱くて $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(|h_{\mu\nu}|\ll 1,\ |h_{\mu\mu,\lambda}|\ll 1)$ と表され，しかも速度が光速に比べて小さい極限（ニュートン近似）では

$$g_{00}\equiv -1-2\phi \tag{2.13}$$

と置くと，式（2.11）は重力ポテンシャル ϕ 中での粒子の運動方程式に帰着することが容易に示される．さらに，式（2.11）より外力 f^μ の定義，すなわち一般の運動方程式を

$$\frac{Du^\mu}{d\tau}=f^\mu \tag{2.14}$$

で与えるのが自然であることがわかる．

特殊相対論では，物理法則は粒子の運動方程式と場の方程式で与えられる．したがって場の方程式の一般化も必要となる．例えば，特殊相対論ではマクスウェル（Maxwell）の方程式は電磁テンソル $F_{\mu\nu}$ と4元電流密度ベクトル j^μ を用いて

$$F_{\mu\nu,\lambda}+F_{\nu\lambda,\mu}+F_{\lambda\mu,\nu}=0,\quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=j^\mu \tag{2.15}$$

と表される．一般共変性の要請は，この方程式を任意の一般座標の変換に対して不変な形に書き改めることを要求している．そのためには，まず j^μ, $F_{\mu\nu}$ などのローレンツ変換に対するテンソル量を，一般座標変換に対するテンソル量に一般化しなければならない．

最も基本的なテンソル量であるスカラー ϕ，反変ベクトル $u^\mu=\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$，共変ベクトル $\phi_{,\mu}$ の変換性は明らかである：

$$\begin{cases} \phi'(x')=\phi(x) \\ u'^\mu(x')=\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,u^\nu(x) & :\quad x^\mu\longrightarrow x'^\mu \\ \phi'_{,\mu}(x')=\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\phi_{,\nu}(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

任意のテンソル量はこれらの積と同じ変換性をもつ量として定義される．例えば j^μ は u^μ と同じく反変ベクトルとして変換し，また $F_{\mu\nu}$（2階共変テンソル）は $\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ と同じ変換性をもつ．すなわち

$$F_{\mu\nu}'(x')=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}F_{\alpha\beta}(x) \tag{2.17}$$

特に $g_{\mu\nu}$ はこの意味で2階の共変テンソルとなっている．また，反変テンソルと共変テンソルは，特殊相対論における $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ のかわりに，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$（これは2階反変テンソルとして振舞う）によって互いに移り変わる．例えば

$$F^{\mu\nu}=g^{\nu\alpha}g^{\nu\beta}\,F_{\alpha\beta} \tag{2.18}$$

このように，テンソルの変換性は，特殊相対論の変換式においてローレンツ変換の行列 $\Lambda^\mu{}_\nu$, $\Lambda_\mu{}^\nu$ を $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$, $\partial x^\nu/\partial x'^\mu$ に置き換えることによって得られる．

場の方程式を共変形に書き換えるためにはこれだけでは不十分である．式(2.16)，(2.17)に現れる変換行列は，一般に考えている点ごとに値が異なっている．そのために，特殊相対論の場合と異なり，テンソルの単なる座標微分(例えば $F_{\mu\nu,\lambda}$)は一般にはテンソルにならない．この問題は，共変微分 ∇_μ を導入することによって解決される．

まずスカラー量 ϕ に対しては，$\phi_{,\mu}$ はテンソルになるので

$$\nabla_\mu \phi (\equiv \phi_{;\mu}) = \phi_{,\mu} \tag{2.19 a}$$

とする．次に反変ベクトル V^μ に対しては

$$\nabla_\mu V^\nu (\equiv V^\nu{}_{;\mu}) = V^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{2.19 b}$$

と通常の微分に補正項を付け加えて定義する．$\nabla_\mu V^\nu$ が再びテンソルになるには，$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ という量が座標変換 $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$ に対して

$$\Gamma'^\nu{}_{\mu\lambda}(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} \tag{2.20}$$

と変換すればよいことが，V^μ の変換性から容易に示される．このような変換性をもつ量は無限個存在する．しかし，微分を修正する必要が生じたそもそもの理由が重力場の存在にあったことを思い起こすと，計量仮説のもとでは，$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ として計量テンソルのみで表されるものを探さねばならないことになる．幸いそのようなものが存在する．それはクリストッフル記号 $\left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\}$ である．$\left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\}$ が式(2.20)の変換性をもつことは，$g_{\mu\nu}$ の変換性を用いて直接確かめることができる．実は，このようなものは $\left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\}$ しかないことも示される．そこで，以下

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \left\{ {\mu \atop \nu\lambda} \right\} \tag{2.21}$$

とする．

式(2.19 b)を任意のテンソルに一般化することは容易である．そのためには，微分が線形作用素でありライプニッツ(Leibnitz)の規則を満たすことを要求すればよい．例えば共変ベクトル U_μ に対しては，$(V^\alpha U_\alpha)_{,\mu} = \nabla_\mu (V^\alpha U_\alpha) = (\nabla_\mu V^\alpha) U_\alpha + V^\alpha \nabla_\mu U_\alpha$ より

$$\nabla_\mu U_\nu (\equiv U_{\nu;\mu}) = U_{\nu,\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} U_\lambda, \tag{2.19 c}$$

2階テンソル $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$ に対しては, $(V^{\alpha}W^{\beta}F_{\alpha\beta})_{,\mu}$ などを考えることにより

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}F_{\nu\lambda}(\equiv F_{\nu\lambda;\mu}) &= F_{\nu\lambda,\mu}-\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}F_{\alpha\lambda}-\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu}F_{\nu\alpha}\\ \nabla_{\mu}F^{\nu\lambda}(\equiv F^{\nu\lambda}{}_{;\mu}) &= F^{\nu\lambda}{}_{,\mu}+\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}F^{\alpha\lambda}+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha}\end{aligned} \tag{2.19d}$$

となる. 最後に, 特に計量テンソルの共変微分はゼロとなることを注意しておく:

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\lambda}\equiv g_{\nu\lambda;\mu}=0,\quad \nabla_{\mu}g^{\nu\lambda}\equiv g^{\nu\lambda}{}_{;\mu}=0 \tag{2.22}$$

このおかげで, $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ による添字の上げ下げと共変微分は可換になる.

ここまでくれば, 式 (2.15) を共変形に書き換えることは容易である. 形式的には微分を共変微分に置き換えるだけでよい:

$$F_{\mu\nu;\lambda}+F_{\nu\lambda;\mu}+F_{\lambda\mu;\nu}=0,\quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=j^{\mu} \tag{2.23}$$

実は $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$ という性質より, 第1式は式 (2.15) の第1式と一致する. したがって特殊相対論の場合と同様に $F_{\mu\nu}$ はベクトルポテンシャル A_{μ} を用いて

$$F_{\mu\nu}=A_{\mu;\nu}-A_{\nu;\mu}=A_{\mu,\nu}-A_{\nu,\mu} \tag{2.24}$$

と表される. 特に真空 $j^{\mu}=0$ に対しては, 式 (2.23) の第2式は次のような波動方程式を与える:

$$\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}A_{\mu}-\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}A_{\alpha}=0 \tag{2.25}$$

十分波長の短い電磁波に対しては, $A_{\mu}=a_{\mu}\exp(iS)$ とおいて Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) 近似を行うことにより, 式 (2.25) はゲージ条件 $\nabla^{\alpha}A_{\alpha}=0$ のもとで位相 S に対する次のような方程式を与える.

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}S\,\nabla_{\nu}S=0 \tag{2.26}$$

この両辺を ∇_{λ} で微分して, $k_{\mu}=\nabla_{\mu}S$ と置くと

$$k^{\alpha}\nabla_{\alpha}k_{\mu}=0 \tag{2.27}$$

という方程式が得られる. 光線は等位相面に垂直なので, 光線の軌跡 $x^{\mu}(v)$ は $\dfrac{dx^{\mu}}{dv}=k^{\mu}$ の解となる. したがって, 式 (2.27) は光線に対する方程式

$$\frac{Dk^{\mu}}{dv}\equiv\frac{dk^{\mu}}{dv}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}k^{\nu}k^{\lambda}=0\quad:\quad k^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{dv} \tag{2.28}$$

を与えている. この式は粒子に対する測地線の方程式と同じ形をしているので

光測地線の方程式と呼ばれる．ただし，式（2.26）より $k^{\mu}k_{\mu}=0$ となるので，v は粒子の場合とちがって固有時ではない．この径数 v はアフィン径数と呼ばれている．

以上より，電磁場以外の場に対してどのようにして一般共変的な方程式を求めればよいかはすでに明らかであろう．

D. アインシュタイン方程式

前項で見たように，重力場中での粒子の運動方程式や物質場の方程式は，特殊相対論における方程式をローレンツ時空におけるテンソル方程式に書き換えるだけで得られる．しかし，重力場自身に対する方程式はこのようなわけにはいかない．

われわれが知っている重力場の方程式は，ポアッソン（Poisson）方程式

$$\Delta\phi=4\pi G\mu \tag{2.29}$$

のみである．ここで ϕ は重力ポテンシャル，μ は物質の質量密度である．計量仮説と一般共変性原理に従うと，われわれはこの方程式に対応した，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対するテンソル方程式を見いださねばならない．

式（2.29）は，重力場のみに関する量と物質のみに関する量を等号で結んだ形をしている．そこで求める方程式も同じ形をしているとしてみよう．計量仮説より重力場は $g_{\mu\nu}$ のみで決定されるので，式（2.29）の左辺に対応する量は $g_{\mu\nu}$ から作られるテンソルということになる．重力場の方程式が完全に $g_{\mu\nu}$ を決定するとすると，この量は2階以上のテンソルということになる．またニュートン近似で式（2.29）に帰着するには，それは $g_{\mu\nu}$ 座標に関する2階微分までしか含まずかつ2階微分について線形な量のはずである．最も簡単な場合として2階のテンソルであるとすると，この条件を満たすテンソルは $R_{\mu\nu}$, $Rg_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ の一次結合しかない．ここで $R_{\mu\nu}$ と R はリーマン（Riemann）の曲率テンソル

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma}\equiv\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\lambda}-\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda,\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} \tag{2.30}$$

から

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu},\quad R\equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{2.31}$$

で定義され，それぞれリッチ（Ricci）テンソル，リッチスカラーと呼ばれる．ここで $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma}$ は次の二つの恒等式（ビヤンキ恒等式）を満たすことを注意しておく：

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}+R_{\mu\lambda\sigma\nu}+R_{\mu\sigma\nu\lambda}=0 \tag{2.32}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma;\gamma}+R_{\mu\nu\sigma\gamma;\lambda}+R_{\mu\nu\gamma\lambda;\sigma}=0 \tag{2.33}$$

一方，右辺の物質分布を表す2階のテンソルとして最も自然なものは明らかにエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ である．したがって，式（2.29）に対応する最も自然なテンソル方程式は

$$R_{\mu\nu}+aRg_{\mu\nu}+bg_{\mu\nu}=kT_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

ということになる．a と k は次の考察から決まる．まず $T_{\mu\nu}$ は特殊相対論における保存則 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ に対応した方程式

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{2.35}$$

を満たすはずである．したがってビヤンキ恒等式（2.33）を μ,λ および ν, σ について縮約して（すなわち $\mu=\lambda$, $\nu=\sigma$ として μ, ν について和をとって）得られる恒等式 $R^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\frac{1}{2}R^{;\mu}$ を利用すると $a=-1/2$ が得られる．次に k はニュートン近似で式（2.34）がポアッソン方程式（2.29）に一致することより $k=8\pi G$ と決まる．このようにして結局，次の方程式（アインシュタイン方程式）を得る：

$$G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi G\,T_{\mu\nu}:G_{\mu\nu}\equiv R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \tag{2.36}$$

ここで，習慣に従って b を Λ と書き換えた．

計量仮説からの自然な帰結として，アインシュタイン方程式は時空構造が物質の分布によって決定されることを表している．したがって，一般相対論では時空はその独立した実在性という点を除いてその絶対性を完全に失い，物質の分布の変化とともに構造の変化する動力学的な対象となってしまう．

以上で，特殊相対論の重力を含む系への一般化である一般相対論の定式化が完了した．

3章　重力不安定と時空の特異点

この章では，星と宇宙という二つの典型的な対象について，重力に伴う不安定性がどのような時空構造の変化を引き起こすかを，ニュートン理論と一般相対論を対比しながら具体的に見てみよう．

3·1　ニュートン理論での星の安定性

ニュートン理論では重力は常に引力として働く．しかもその大きさは引き合う物体の距離が短いほど強くなる．したがって，圧力が働かない限りすべての天体は有限な時間で無限に高密度の天体へとつぶれてしまう．もちろん，現実の天体では圧力が重要な役割を果たしている．そこでまず，圧力がこのような重力不安定を阻止できるかどうかを調べてみよう．以下では，簡単のために球対称な天体に話を限る．

A. 熱い天体

天体が圧力によって支えられて平衡にあるとすると，その半径 R は圧力と重力のバランス

$$\frac{1}{\mu}\frac{P}{R}=\frac{GM}{R^2} \tag{3.1}$$

によって決まる．ここで μ は平均質量密度，P は平均圧力，M は天体の質量を表す．

この圧力としてまず考えられるのは，天体を構成する気体粒子の熱運動によるものである．あまり重くない恒星はこのような圧力によって支えられている[20]．気体が非相対論的な単原子理想気体で，圧力変化が断熱的 ($P\propto(R^3)^{-5/3}$)

とすると，式（3.1）と統計力学の諸公式[21]より半径は

$$R \simeq e^{2s/3}\left(\frac{M}{M_{ch}}\right)^{-1/3} R_{ch} \tag{3.2}$$

で与えられる．ここで s は一粒子当たりのエントロピーである．また，M_{ch} と R_{ch} は陽子の質量 $m_{\rm P}$ と三つの普遍定数 c, $\hbar$, G から作られる質量および長さの次元をもつ量で次式で与えられる：

$$M_{ch} \equiv (\hbar c/G)^{3/2} m_{\rm P}^{-2} = 3.71\times 10^{33}{\rm g} = 1.87 M_{\odot}$$

$$(M_{\odot} = 1.99\times 10^{33}{\rm g}\ \text{は太陽質量}) \tag{3.3}$$

$$R_{ch} \equiv 2(\hbar^3/Gc)^{1/2} m_{\rm P}^{-2} = 5.48\ {\rm km} \tag{3.4}$$

M_{ch} はチャンドラセカール（Chandrasekhar）質量と呼ばれる．式（3.2）は，輝くことによって失ったエントロピーを，星の内部における核反応による発熱によって供給し続ける限り，恒星は安定した大きさを保つことができることを示している．

一方，重い星は輻射圧によって支えられる[20]．このような天体に対しては，断熱変化に対して圧力が $P \propto T^4 \propto (R^3)^{-4/3}$（$T$ は平均温度）のように振舞うために，式（3.1）はこんどは質量とエントロピーの関係を与える：

$$M \sim 0.07\, s^2 M_{ch} \tag{3.5}$$

したがって，このような星は常に一定のエントロピーを維持しないと不安定となる．

B. 冷たい天体

星は有限な時間で核燃料を使い尽くす．燃えつきた星は輝くことによってエントロピーを失い続け，式（3.2）に従って急速に収縮してゆく．重い星の場合は，この過程はよりカタストロフィックである．

この収縮はどこまで続くであろうか．正負の電荷は必ず等量存在するので，電気力は全体として圧力を理想気体に比べて小さくするよう作用し，収縮を止めるのに役立たない．したがって，星は通常の世界での物質に比べてはるかに高い密度になるまで収縮を続ける．このような高密度の星では実は，縮退圧と呼ばれる量子論的な圧力が重要になってくる．

通常の物質は，電子，陽子，中性子などのフェルミ粒子から成っている．フ

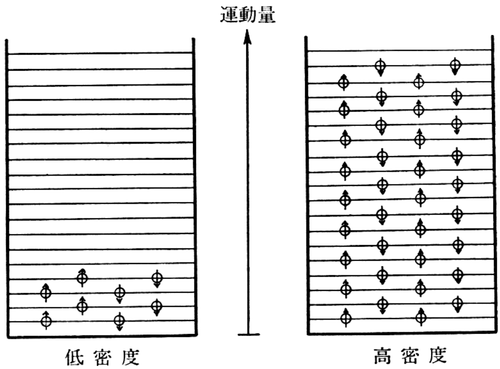


図 3.1

ェルミ粒子は，パウリ（Pauli）の排他律により一つの量子状態に1個の粒子しか入れないために，密度が高くなるほど粒子はどんどん高いエネルギー状態にまで分布するようになる（図 3.1）．その結果，粒子は大きな平均運動量をもつようになり，たとえ温度がゼロで相互作用がなくとも有限な圧力が働くようになる．これが縮退圧である．

位相空間において一つの量子状態の占める体積は h^3 なので，数密度が n のときの粒子の平均運動量 p は

$$\text{一粒子当たりの位相体積} \simeq p^3/n \sim h^3 \qquad (3.6)$$

という条件で決まる．したがって粒子の速度 v が光速に比べて小さいとき（非相対論的），縮退圧は

$$P \sim nvp \sim \frac{h^2}{m} n^{5/3} \qquad (m\text{ は粒子の質量}) \qquad (3.7)$$

で与えられる．したがって，式（3.1）より圧力と重力は

$$M \sim \left[\frac{n}{(m/hc)^3}\right]^{1/2} M_{ch} \qquad (3.8)$$

のときつり合うことになる．式（3.6）より非相対論的近似が成り立つ条件は $n \sim p^3/h^3 < (mc/h)^3$ となるので，式（3.8）は $M \leq M_{ch}$ を意味する．すなわち質量に上限が存在する．一方，密度が $n > (mc/h)^3$ となり，粒子が相対論的になると $v \sim c$ となるので，圧力は

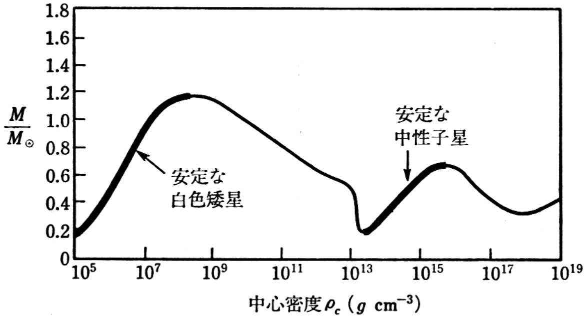


図 3.2　原子核に対する単純な質量公式を用いた場合の高密度星（温度ゼロ）の質量と中心密度の関係［文献 22) S. L. Shapiro-S. A. Thukolsly より転載］

$$P \sim ncp \sim chn^{4/3} \tag{3.9}$$

で与えられる．ところがこのとき，圧力勾配は $P/\mu R \sim M^{1/3} M_{ch}{}^{2/3}/R^2$ となるため，式 (3.1) は $M \sim M_{ch}$ を与える．したがって密度によらず，M_{ch} 程度の上限質量が存在することになる．

β 平衡にある原子核，陽子，中性子および電子の理想気体からなる星の質量 M を，星の構造をきちんと解くことにより中心密度 ρ_c の関数として求めた例を図 3.2 に示してある．M が ρ_c とともに増加している範囲が安定な星として実現される．図 3.2 はこのような範囲が二つ存在することを示しているが，それらのうち低密度の部分は，星が電子の縮退圧によって支えられている場合（白色矮星）に，高密度の部分は中性子の縮退圧によって支えられている場合（中性子星）に対応する．上で示したように，上限質量が本質的に圧力を担っている粒子の質量によらないことを反映して，中性子星，白色矮星のいずれに対しても上限質量は $1M_\odot$ 程度となっている．

もちろん，上限質量の正確な値は粒子間の相互作用に依存する．しかし詳しい研究によるとこの値は，縮退圧を担う粒子の種類によらず約 $2M_\odot$ となり，上で求めた値と大きく違わないことが示されている[22]．

C. 星の重力崩壊

上限質量 M_{cr} より重い天体は，十分冷えた後には必ず自己重力のために限

りなく収縮し続けることになる．この過程は非常に急速に起こる（通常の星で1秒程度）ために，重力崩壊と呼ばれている．

ここで興味深いことは，M_{cr} が恒星の平均的質量と同程度であることである．このことは，平均より重い星は，核燃料を燃やし尽くした後に重力崩壊を起こすことを意味している．もっとも，現実には，星の進化の途上での星風による質量放出や，核燃焼段階末期での超新星爆発などにより，星は質量のかなりの部分を宇宙空間に放出するため，星の最初（水素燃焼段階）の質量が M_{cr} よりかなり大きくないと重力崩壊を起こさない．詳しい研究によると，約 15 $M_{\odot}$ より重い星は実際に重力崩壊を起こすことが示されている[23]．

さて，このように重力不安定によってカタストロフィックな現象が現実に起こるとすると，これは深刻である．重い星の寿命（核燃焼の期間）は100〜1000万年で，宇宙の年齢〜100 億年に比べてずっと短い．われわれの銀河には星が約 10^{11} 個もあることを考え合わせると，われわれのまわりには重力崩壊の産物がごろごろしていることになる．したがって，重力崩壊の産物は一体どのようなものかということが非常に重要な問題となる．もちろんニュートン理論の与える答えは，文字どおりの質点（回転していれば無限に薄い円板）である．それは，無限に強い重力場を伴い，周囲に対して恐ろしく破壊的な存在となる．

3·2　一般相対性理論における重力崩壊

2章で詳しく述べたように，一般相対性理論は重力を時空の構造としてとらえる．太陽や惑星の作る重力場のように弱い重力場に対しては，時空構造のミンコフスキー時空からのずれは非常に小さく，全く問題にならない．しかし，限りなく強い重力場を伴う可能性のある重力崩壊に対しては時空構造の変化は決定的となる．

A.　シュヴァルツシルトブラックホール

星が球対称な場合には，星の外部の時空構造はアインシュタイン方程式の球対称な真空解（$T_{\mu\nu}=0$）で記述される．単純に考えると，星が収縮している以

上，星の外部の時空構造も時間とともに変化しそうに思われる．しかし，幸いなことに，球対称な真空解は必ず時間に依存せず，ただ1個の任意定数 r_s をもつ次のような計量（シュヴァルツシルト計量）で与えられることが示される（バーコフの定理）[2,18]：

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2\,d\Omega^2 : d\Omega^2\equiv d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{3.10}$$

ここで，t は時間座標（シュヴァルツシルト時間），r，θ，ϕ は通常の球座標に対応する．

r_s の物理的意味を見るために，ニュートン理論との対応を考える．弱い重力場に対して，ニュートン理論の重力ポテンシャル ϕ と計量は $g_{00}\simeq-1-2\phi$ という関係で結ばれている．したがって，質量 M を

$$r_s=2GM \tag{3.11}$$

によって定義すると $\phi=-GM/r$ となり，計量（3.10）が質量 M の球対称な天体の外部の時空を表していることがわかる．r_s はシュヴァルツシルト半径と呼ばれている．もちろん，天体の内部は真空解であるシュヴァルツシルト解では表されない．しかし話をすっきりさせるために，まず至る所この解で表される時空（シュヴァルツシルト時空）の構造を調べておこう．

式（3.10）を見てすぐ気づくことは，$r=0$ と $r=r_s$ で計量テンソルが発散していることである．ところが，曲率テンソルから作られるスカラー量 $R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}$ を計算してみると

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}=\frac{12\,r_s^2}{r^6} \tag{3.12}$$

と $r=0$ では依然として発散しているが，$r=r_s$ では有限になっている．この事情は次のように理解できる．

まず $r=0$ での発散は，シュヴァルツシルト時空が“点質量”の作る重力場に対応しているために，$r=0$ で重力場が無限に強くなっていることを表している．もっとも今の場合，$r=0$ の特異性はニュートン理論とは比較にならないほど深刻な意味をもっている．そこでは時空の計量自体が意味を失っているた

めに，もはや $r=0$ は時空には属さない個所である．いかなる物体もそこを通過することはできない．このような個所は時空の特異点（spacetime singularity）と呼ばれている．

一方，$r=r_s$ は実は計量テンソルを成分表示するのに用いた座標の特異性によって生じた見かけの特異点である．これとよく似た状況は，球面 $S^2: x^2+y^2+z^2=1$ を球面上の内部座標で表そうとすると生ずる．例えば，$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ で定義される座標（ρ, φ）を用いると，計量は

$$ds^2=\frac{d\rho^2}{1-\rho^2}+\rho^2 d\varphi^2 \tag{3.13}$$

と表される．この計量は $\rho=1$ で発散しているが，$\rho=1$ に対応する S^2 上の個所：$x^2+y^2=1$, $z=0$ は何ら特異な部分ではない．この見かけの特異性の原因は，（ρ, φ）座標が S^2 全体を覆っていないことにある（図 3.3 参照）．実際，S^2 全体を覆う通常の球面座標 θ, φ を用いると，計量は $ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2$ と何ら特異性のない形で表される．

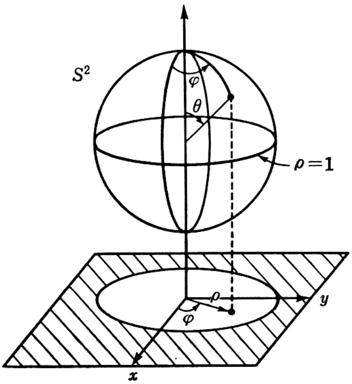


図 3.3　（ρ, φ）の座標は球面 S^2 の上半球ないし下半球のみを覆う

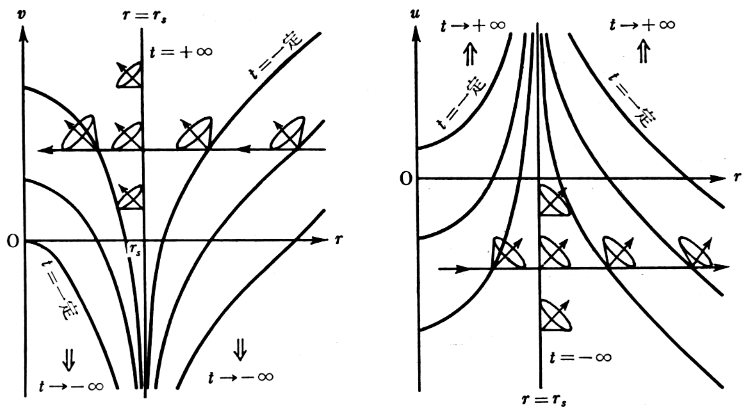
この例と同じように，シュヴァルツシルト計量の $r=r_s$ での見かけの特異性は，適当な別の座標を用いることにより消し去ることができる．例えば t の代わりに，いわゆる先進時間（advanced time）

$$v\equiv t+r+r_s\ln|r/r_s-1| \tag{3.14}$$

を用いると（Ingoing Eddington-Finkelstein 座標）[18]

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dv^2+2dv\,dr+r^2 d\Omega^2 \tag{3.15}$$

となる．図 3.4 (a) を見るとわかるように，この座標は $r<r_s$ と $r>r_s$ の両領域を覆っている．t 座標は $r\to r_s$ で $t\to\infty$ となり特異になっている．



(a)　　(b)

図 3.4

このように，$r=r_s$ 面はそこで時空構造がこわれるような特異点ではないが，別の意味で特異な性格をもっている．式 (3.15) から容易にわかるように，$v=\theta=\varphi=$一定という方向で $ds^2=0$ となる．このことは，$v=$一定という面が光の波面の4次元時空での軌跡を表していて，その上の至る所で光円錐に接していることを示している．このような3次元面は光的面 (null surface) と呼ばれる．今の場合特に，$v=$一定にそって t が増加すると $r>r_s$ では r が減少するので，この面は原点に向かって収束する球面状の光波面の軌跡を表す．

重要なことは，$r=r_s$ も光的面になっていることである．$v=$一定の光波面はこの面を内向きに横切っているのであるから，この面は外向きに広がる光波面の軌跡になっているはずである．光速度は情報伝達の最大速度であるので，このことは，いかなる情報も $r=r_s$ 面を外向きに横切ることはできないことを意味している．すなわち $r=r_s$ 面は内向きに一方通行の面なのである．特に，$r>r_s$ に住むわれわれからは，$r<r_s$ の部分は見えないことになる．この意味で，$r=r_s$ 面は“事象の地平面”(event horizon)，その内部はブラックホール (black hole) と呼ばれる．

$r=r_s$ 面の見かけの特異性は，v の代わりに遅延時間 (retarded time)

$$u\equiv t-r-r_s\ln|r/r_s-1| \tag{3.16}$$

を用いても除去できる (Out-going Eddington-Finkelstein 座標)[18]：

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)du^2-2du\,dr+r^2d\Omega^2 \qquad (3.17)$$

ところがおもしろいことに，この座標では $r=r_s$ 面は $t=-\infty$ に対応している（図 3.4 (b) 参照）．u＝一定面は再び光的面となっているが，v＝一定面と異なり，外向きに広がる球面波に対応している．したがって $r=r_s$ 面を外向きに横切っている．このことは $r=r_s$ 面が外向きの一方通行面であることを意味している．すなわち，$r<r_s$ の領域はこんどはホワイトホール (white hole) ということになる．

この見かけのパラドックスは，実はこれら2組の座標がいずれも依然としてシュヴァルツシルト時空全体を覆っていないことに起因する．全時空を覆う座標は t, r と次のような関係にある座標 (Kruskal-Szekeres 座標)[18] で与えられる：

$$UV=(1-r/r_s)e^{r/r_s}$$
$$U/V=\pm e^{-t/r_s} \qquad (3.18)$$

この座標で，計量は次のように表される：

$$ds^2=-\frac{4r_s^3}{r}e^{-r/r_s}dU\,dV+r^2d\Omega^2 \qquad (3.19)$$

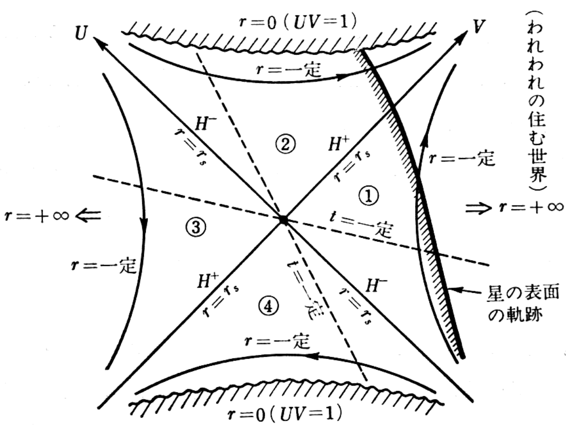


図 3.5　全シュバァルツシルト時空

U=一定，V=一定はともに光的面となっている．

UV 座標では，全シュヴァルツシルト時空は $UV \leqq 1$ の領域で表される．図 3.5 に U, V と r, t の関係が示されている（この図で各点が半径 $r(U, V)$ の2次元球面を表すと解釈すると，4次元時空が再現される）．この座標では $r=r_s$ 面は二つの面 $U=0$ (H^+ 面）と $V=0$ (H^- 面）からなり，全時空を ①～④の四つの領域に分けている．①と③は全く同じ構造をもち，$r \sim \infty$ に広がっている．②と④も全く同じ構造をもち，$r=0$ を含んでいる．

この座標とエディントン-フィンケルシュタイン（Eddington-Finkelstein）座標との関係は

$$u=-2r_s \ln|U|, \quad v=2r_s \ln|V| \tag{3.20}$$

となる．これより，(t, v）座標は①と②ないし③と④の領域を，(t, u）座標は①と④ないし②と③の領域を覆っていたことになる．したがってわれわれが①の領域にいるとすると，②がブラックホール，④がホワイトホールに対応することになる．この視点から，H^+ 面および H^- 面はそれぞれ未来の事象地平面（future horizon），過去の事象地平面（past horizon）と呼ばれる．

B. 球対称な星の重力崩壊

一般相対性理論における球対称な星の重力崩壊の様子は，星の内部の構造に関する限りは，ニュートン理論と大差はない．しかし，外部からの様子は大きく異なる．前節で述べたように，星の外部の時空構造は常にシュヴァルツシルト時空で表される．星の表面は重力収縮によって有限な時間（固有時で計って）で事象地平面 $r=r_s=2GM$（M は星の質量）を横切ることになる（図 3.5 参照）．ところが，この面は情報の一方通行面であるために，$r<r_s$ となったとたんに星は外部から見えなくなる．あとにはブラックホールが残される．ブラックホールに入った星は有限な時間（固有時）で時空の特異点 $r=0$ に突入してしまう．

図 3.6 に，重力崩壊に伴う時空構造の変化の様子が ($\hat{t}$, r）座標（$\hat{t}=v-r$）のもとで示されている．最初平らであった時空は，星の収縮によって重力場が強くなるにつれしだいにひずんでくる．特に，外向きの光波面（u=一定）の軌

跡は，光が重力によって中心に引かれる結果，星の表面付近で内向きに曲げられるようになる．この曲がりは星の表面が $r=r_s$ に近づくにつれて大きくなり，$r=r_s$ に達するとついに表面積を一定に保って“広がる”ようになる．表面が $r<r_s$ の領域に達すると，いったん広がった波面も強い重力に引きもどされて $r=0$ に収束するようになる．

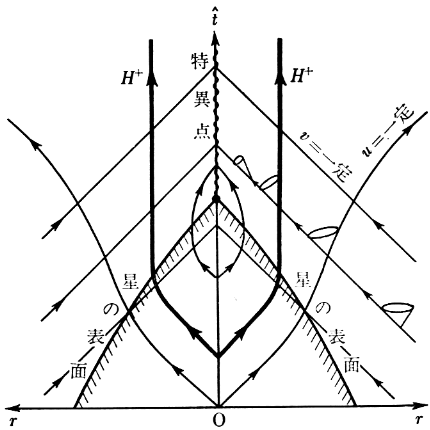


図 3.6　星の重力崩壊による時空構造の変化

このように，一般相対性理論における球対称な星の重力崩壊は，星が一点にまで収縮してしまうことによる時空の特異点の発生と，事象の地平面による特異点の外界からの遮蔽という二つの点によって特徴づけられる．前者は，重力の万有引力的性格が一般相対性理論にも受け継がれて，時空のカタストロフィックな不安定性を引き起こすことを意味する．一方，後者は，少なくとも球対称な場合にはこのカタストロフが，時空構造の変化によって無害化されることを示している．

3・3　宇宙の特異点

重力はその万有引力的性格のために質量の大きな系になるほどより重要な役割を果たすようになる．このような系の中で最大のものはなんといっても宇宙全体を一つの力学系と見たものである．

A.　一様等方な膨張宇宙

われわれの宇宙における物質の分布は，局所的には，星から銀河にわたる様様な大きさの天体が階層的にむれ集まった複雑な構造をしている．しかし，銀河に比べてずっと大きいスケール（$\gtrsim 100\,\mathrm{Mpc}$: $1\,\mathrm{Mpc}=10^6\,\mathrm{pc}$, $1\,\mathrm{pc}=3\times10^{18}\,\mathrm{cm}$）では，物質分布が銀河によって代表されているとする限り，非常によい精

度で一様である（宇宙の大域的一様性）[24]．

われわれの宇宙の全体としての構造を特徴づけるもう一つの重要な性質は，それが一様に膨張していることである．このことは，遠方の銀河から来る光のスペクトル線の赤方偏移から求められた銀河の後退速度 v が，ハッブル (Hubble) の法則

$$v=H_0 r \tag{3.21}$$

に従うことから導かれる[17]．ここで r は，われわれから銀河までの距離，H_0 はハッブル定数と呼ばれる定数である（$H_0=50\sim100$ km/sec/Mpc）[25]．

この二つの特徴は，宇宙全体を非常に単純な力学系として記述することを可能にする．

B. ニュートン的宇宙論

ニュートン理論では，宇宙を無限に大きな，一様で球対称なガス雲としてとらえることができる．ガス雲が一様なので圧力は運動に影響しない．したがって，一定の質量 M を含む半径 r のガス球に着目すると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2-\frac{GM}{r}=\varepsilon \quad ：一定 \tag{3.22}$$

となる．現在の量に添字0をつけることにすると，ハッブルの法則より $(\dot{r})_0=H_0 r_0$ となるので，μ をガス雲の質量密度として $\varepsilon=\left(\frac{1}{2}H_0^2-\frac{4\pi}{3}G\mu_0\right)r_0^2$ となる．したがって

$$a=r/r_0 \tag{3.23}$$

と置き，$\mu=\mu_0 a^{-3}$（質量の保存）となることを用いると，式 (3.22) は r_0 によらない a のみの式になってしまう：

$$\dot{a}^2=\frac{8\pi G}{3}\frac{\mu_0}{a}-k \quad : \quad k\equiv H_0^2-\frac{8\pi}{3}G\mu_0 \ （一定） \tag{3.24}$$

このことは，現在宇宙が一様でハッブル則に従う膨張をしていれば，その性質は常に保たれることを意味している．a は（現在を規準としたときの）宇宙の大きさを表しているので宇宙の膨張係数 (expansion factor ないし scale

factor）と呼ばれている．ハッブル定数 H_0 は a を使って

$$H_0=(\dot{a}/a)_0$$

と表されるので，現在の宇宙の膨張率を表している．

a の時間変化の定性的特徴は，式（3.24）をポテンシャル $V(a)=-\dfrac{4\pi G}{3}\dfrac{\mu_0}{a}$ 内を運動する単位質量をもつ粒子に対するエネルギー保存則と見なすことによって簡単に調べることができる（図 3.7）．この図より，現在の宇宙は膨張しているので（$(\dot{a})_0>0$）時間をさかのぼると a は単調に減少し，有限な時間でゼロになることがわかる．したがってわれわれの宇宙は，有限な時間の過去（$1/H_0$～100 億年前）に無限の高密度の“一点”から始まったことになる．

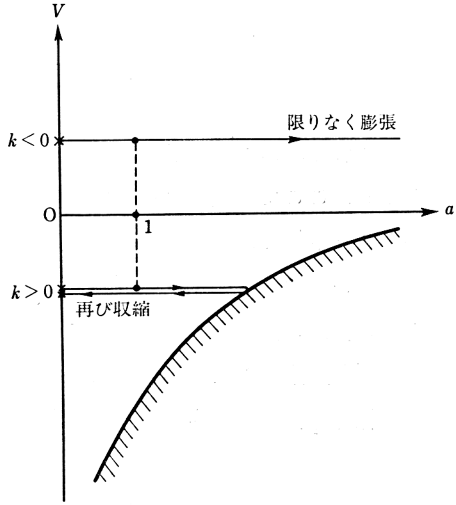


図 3.7

もう一つの興味深い特徴は，$k>0$（エネルギー負）の場合には有限な未来に再び宇宙は収縮を始めついには一点にまでつぶれてしまうことである．これは星の重力崩壊と類似の現象である．残念ながら，われわれの宇宙の k の符号は現在の観測では決まっていない．

C. 一般相対論的宇宙論

一般相対論に基づいて宇宙を扱うためには，宇宙全体を表す時空がどのような構造をもつかを決定しなければならない．一つのよりどころは物質分布の一様性である．このことを宇宙膨張の一様性と合わせると，時空構造自体も（空間的に）一様とするのが自然である（宇宙原理：Cosmological principle）．実はさらに，宇宙を満たしている黒体輻射（エネルギースペクトルが約 2.7°K に相当するプランク分布をしている雑音電波）の観測より，われわれの宇宙の

時空構造は非常によい精度で等方的であることもわかっている[26]. 一様性と等方性を要請すると，時空の構造はほぼ決まってしまい次の計量（Robertson-Walker 計量）で与えられる[17]：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{3.25}$$

ここで K は定数である. また a は時間のみの関数でニュートンモデルでの膨張係数に対応する. 距離 l を

$$l \equiv a\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{3.26}$$

で導入すれば，$v \equiv \dot{l} = (\dot{a}/a)l$ とハッブルの法則が再現される.

ただし，ここで注意しないといけないことは，空間が $K=0$ の場合を除くとユークリッド的でない点である. $K>0$ のときは3次元球面（閉じた宇宙)に，$K<0$ のときは3次元双曲面（開いた宇宙）になる. K（正確には K/a^2）はこれらの空間の曲率を表していることが示される[17].

a の時間変化はアインシュタイン方程式を解くことにより得られる. まず宇宙の一様等方性より，エネルギー運動量テンソルが理想流体に対するものと同じ形

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\lambda} \tag{3.27}$$

をもたねばならないことが示される[17]. ここで ρ は物質のエネルギー密度，P は圧力，u^μ は物質の4元速度ベクトルで（t, r, θ, φ）座標では（1, 0, 0, 0）という成分をもつ. この式を用いると，アインシュタイン方程式のうち独立なものは次の二式となる（この項では $\Lambda=0$ とする. 次項D参照)：

$$G^0{}_0 = 8\pi G T^0{}_0 \quad : \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{3.28}$$

$$G^i{}_i - G^0{}_0 = 8\pi G(T^i{}_i - T^0{}_0) \quad : \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \tag{3.29}$$

また，運動方程式より

$$u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad : \quad \dot{\rho} = -3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} \tag{3.30}$$

もちろん，式 (3. 30) は式 (3. 28) と (3. 29) より導くことができる．

特に，$P=0$ の場合は $\rho \propto a^{-3}$ となるので $\mu=\rho$ ($c=1$ に注意)，$k=K$ とすると，式 (3. 28) は 前B項の式 (3. 24) と完全に一致する．したがって解釈の違いを別にすれば，ニュートン的宇宙論は実は物質の圧力がエネルギー密度に比べて十分小さい場合の宇宙を表していることになる．

ニュートンモデルでの宇宙の振舞いの最大の特徴は，宇宙の膨張係数 a が有限な過去でゼロとなることであった．この結果は，上で述べたことより $P=0$ ならば一般相対性理論でもそのまま成り立つ．ただし，そのもつ意味は大きく異なる．今の場合，$a=0$ となることは，単に物質の密度が無限に大きくなるのみでなく，時空構造自体がそこで破綻することを意味している．それ以前では時空そのものが存在しない．この意味で，この $a=0$ となる点は宇宙の初期特異点と呼ばれている．

一見，十分大きな圧力が働けばこの特異点は現れないように思われるかもしれない．しかし実際は逆である．圧力は一様性のためにむしろ特異性を増す方向に働いてしまう．このことは式 (3. 29) を見ると容易にわかる．この式は，$P \geqq -\rho/3$ である限り $\ddot{a}<0$ となって，ある時刻に $\dot{a}>0$ ならば必ず有限な時間の過去で $a=0$ となることを示している (図 3. 8 参照)．

このように，宇宙が一様等方で通常の $P \geqq 0$ の物質で満たされている限り，宇宙の初期特異点はさけられないことになる．この特異点は星の重力崩壊の場

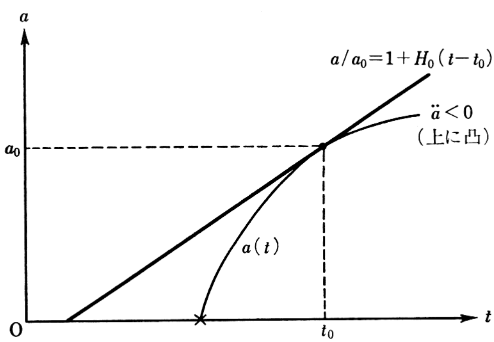


図 3.8

合のように事象の地平面で隠されることはなく，われわれに直接影響を及ぼしうるものであるという点で非常にやっかいなしろものである．そのため，このような初期特異点のない宇宙モデルを見いだそうとする様々な試みがなされてきた．

その第一のものは，一様等方性の仮定をはずそうとするものである．現実の宇宙は完全に一様等方ではなく局所的には非一様である．このような一様性からのずれがあれば，初期特異点はなくなるのではないかという考え方である．しかし，この可能性は次章で詳しく説明する特異点定理という一般定理によってみごとに打ち砕かれてしまった．

第二のものは，宇宙のごく初期では物質の状態方程式が通常の物質とは大きく異なる可能性を探るものである．これについては次項Dで少し触れる．

第三のものは，古典論の枠から出て量子論的効果にたよろうとするものである[27]．この方向に関しては，最近ホーキングによって，重力の量子論の立場から興味深い議論が展開されている．限られた紙数ではそれを紹介することは不可能であるので，興味のある方は原論文を参照してほしい[28]．

D. 宇　宙　項

これまで宇宙項 $\Lambda=0$ の場合に話を限ってきたが，$\Lambda\neq 0$ の場合には少し状況が変わってくる．Λ 項を含むアインシュタイン方程式（2.36）とエネルギー運動量テンソルに対する表式（3.27）を比較してみると，宇宙項は

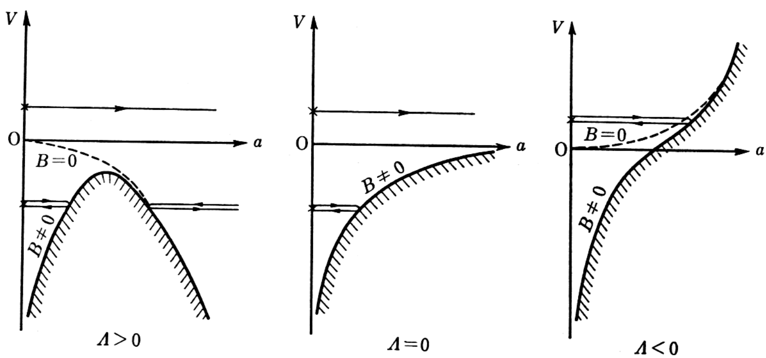


図 3.9

$$\rho=-P=\Lambda/8\pi G \tag{3.31}$$

の理想流体と同じ効果をもつことがわかる．したがって前C項の議論より，この項は初期特異点を除く効果をもつ可能性がある．

今，ρ が a^{-n} に比例するとすると，式 (3.28) は $\Lambda \neq 0$ の場合

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2+V(a)=-\frac{K}{2} \quad : \quad V(a)=-\frac{\Lambda}{3}a^2-\frac{B}{a^{n-2}} \quad (B\text{は非負の定数}) \tag{3.32}$$

となる．図 3.9 に示したように，Λ の符号に応じて V の振舞いは大きく変化する．特に $\Lambda>0$ の場合には，確かに $a=0$ とならない解が存在することがわかる．現在の観測では，わずかながらわれわれの宇宙がこのような解で記述される可能性が残っている．

このような解のうち最も単純なものは，特に $K>0$, $\Lambda>0$, $T_{\mu\nu}=0$ $(B=0)$ の場合である．この解で表される時空はドゥ・ジッター (de Sitter) 時空と呼ばれ，その膨張係数は

$$a=a_0\cosh(Ht) \quad : \quad a_0=\left(\frac{3}{2}\,\frac{c^2K}{\Lambda}\right)^{1/},\quad H=\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} \tag{3.33}$$

と表される．この宇宙では，宇宙の始まりは無 の過去 ($t\to-\infty$) となる．最近，素粒子の統一理論に基づくと宇宙の初期に時空構造が近似的に式 (3.33) で表される時代が現れる可能性がある が指摘されている（インフレーション宇宙モデル）[29].

4章　特異点定理

前章で星と宇宙という二つの典型的な系において，重力の万有引力的性格に基づく不安定性が時空の特異点の発生というカタストロフィックな現象を引き起こすことを示した．ただそこで扱われた系は，球対称性や空間的一様性など何らかの対称性をもつ点で特殊な系であった．時空構造の崩壊という現象の重大性を考えると，このような現象が特殊な対称性をもつ系でのみ起こるのか，それとも一般的なものであるのかを明らかにすることがぜひとも必要となる．

1章で述べたように，この問題は 1960 年代後半にホーキングとペンローズによって解決された[5~7]．本章では，彼らの示した一連の定理の中で最も単純なペンローズの定理を中心として，特異点定理の内容とその証明の概要を紹介する．

4·1　曲がった時空での幾何光学

ペンローズ‐ホーキング理論の最大の特徴は，測地線の大域的な振舞いに関する理論であるという点にある．そこでまず測地線，より正確には測地線束 (congruence of geodesics) の振舞いを記述する基礎方程式を導いておこう．簡単のために，光測地線束の場合に話を限る．

A. ヤコービ場

$\gamma : x^\mu = x^\mu(v,\ z^i)$ を光測地線束（v は各測地線のアフィン径数，z^i ($i=1\sim3$) は各測地線のラベル)，$\boldsymbol{V}=(V^\mu)$ をその接ベクトル場 $V^\mu=\dfrac{\partial x^\mu}{\partial v}$ とする．光測地線なので $V^\mu V_\mu=0$ となる．一つの測地線 $\gamma_0 : x^\mu = x^\mu(v,\ z^i=0)$ に着目して，γ_0 の各点とその近傍の測地線上の v が同じ値をもつ点を結ぶベクト

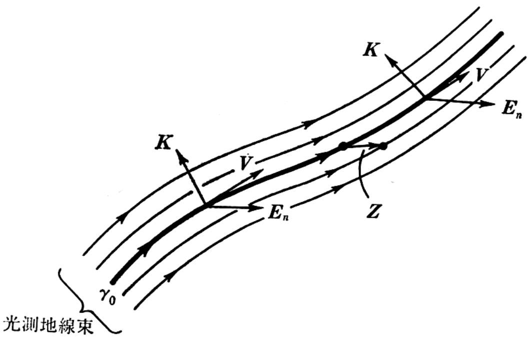


図 4.1

ル場を $\boldsymbol{Z}(v)$ とする（図 4.1 参照）．$Z^\mu(v)=\dfrac{\partial x^\mu}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i$ と書けること，および $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$ という性質より

$$
\begin{aligned}
Z^\nu\nabla_\nu V^\mu - V^\nu\nabla_\nu Z^\mu &= V^\mu{}_{,\nu}Z^\nu - Z^\mu{}_{,\nu}V^\nu \\
&= \frac{\partial}{\partial z^i}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\right)\mathrm{d}z^i - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial z^i}\right)\mathrm{d}z^i = 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

となることを注意しておく．

$\boldsymbol{Z}$ の γ_0 にそう変化を記述するために，γ_0 にそって次のような方法で4個の互いに独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{E}_4\}$ を定義する．まず γ_0 上の一点 $v=v_0$ で $\boldsymbol{V}$ と独立で次の条件を満たす光的ベクトル $\boldsymbol{K}$ と空間的ベクトル $\boldsymbol{E}_n$ $(n=3,4)$ を一組選ぶ：

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{K}\rangle=-1,\ \langle \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K}\rangle=\langle \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{E}_n\rangle=\langle \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{E}_n\rangle=0, \\
&\langle \boldsymbol{E}_n,\ \boldsymbol{E}_m\rangle=\delta_{nm}(n,\ m=3,\ 4)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ここで，$\langle \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}\rangle$ は内積 $X^\mu Y_\mu$ を表す．これらのベクトルを

$$
\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}=\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{K}=\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{E}_n=0 \tag{4.3}
$$

という条件を満たすように γ_0 全体に広げたものを $\boldsymbol{E}_n(v)$, $\boldsymbol{K}(v)$, $\boldsymbol{V}(v)$ とする．ここで $\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{W}$ はベクトル $V^\nu\nabla_\nu W^\mu$ を表す．式 (4.3) の条件はユークリッド空間における平行移動の曲がった空間への一般化である．計量テンソルの共変微分がゼロであるので，平行移動によってベクトルの内積は不変に保たれ

る．したがって $\boldsymbol{E}_n(v)$，$\boldsymbol{K}(v)$，$\boldsymbol{V}(v)$ は v によらず条件 (4.2) を満たす (擬直交基底)．

この基底を用いると，$\boldsymbol{Z}(v)$ は

$$\boldsymbol{Z}(v)=T(v)\boldsymbol{V}(v)+S(v)\boldsymbol{K}(v)+Z^n(v)\boldsymbol{E}_n(v) \tag{4.4}$$

と表される．$T(v)$ は単に γ_0 にそう移動を表すので興味がない．また $S(v)=-\langle\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{Z}\rangle$ は，式 (4.1) より

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}v}=-\langle\boldsymbol{V},\ \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{Z}\rangle=-\langle\boldsymbol{V},\ \nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{V}\rangle=-\frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{Z}}\langle\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V}\rangle=0 \tag{4.5}$$

となるので，S は v によらない定数となる．S は，同一の光源から放たれた光線の間の放たれた時刻の差に相当する量を表していると考えられる．したがって，最後に残った $Z^n(v)$ は光測地線間の空間的隔たりを表す．

式 (4.1) およびそれを $\boldsymbol{V}$ にそって共変微分することによって得られる式と $\boldsymbol{E}_n$ との内積をとることにより次式を得る：

$$\frac{\mathrm{d}Z^n}{\mathrm{d}v}=V_{n:m}Z^m \quad : \quad V_{n:m}\equiv\langle\nabla_{\boldsymbol{E}_n}\boldsymbol{V},\boldsymbol{E}_m\rangle \tag{4.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Z^n}{\mathrm{d}v^2}=-R^n{}_{\mu m\nu}V^\mu V^\nu Z^m \tag{4.7}$$

特に式 (4.7) を満たす測地線にそうベクトル場はヤコービ (Jacobi) 場と呼ばれる．

B. レイチャードリイ方程式

式 (4.7) をもう少し便利な形に書き換えるために

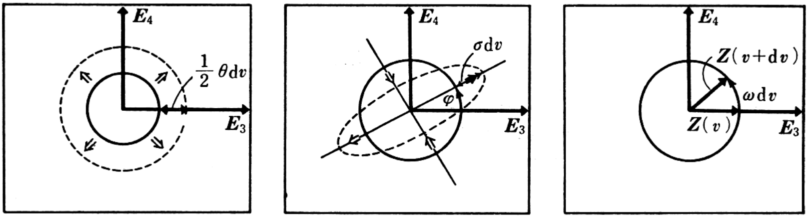
$$\omega_{nm}\equiv\frac{1}{2}(V_{n;m}-V_{m;n}),\ \theta\equiv V_{n;m},\ \sigma_{nm}=\frac{1}{2}(V_{n;m}+V_{m;n}-\theta\delta_{nm}) \tag{4.8}$$

で定義される量を導入する．ω_{nm} は反対称，σ_{nm} は対称で跡がゼロ ($\sigma_{nn}=0$) の行列なので，次のように表される：

$$(\omega_{nm})=\begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix},\ (\sigma_{nm})=\sigma\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

ここで，式 (4.6) が

$$Z^n(v+\mathrm{d}v)-Z^n(v)=\left(\omega_{nm}+\frac{1}{2}\theta\,\delta_{nm}+\sigma_{nm}\right)\mathrm{d}v \tag{4.10}$$



面積膨張率 θ　　ひずみ率 σ_{mn} (σ, φ)　　回転率 ω_{mn} (ω)

図 4.2　実線はアフィン径数 $v=v_0$ での光波面上の単位円を，破線はその円を通る光測地線と $v=v_0+dv$ での光波面との交線を表す

と書き直されることに着目すると，ω は光波面（$v=$一定面）の単位 v 当たりの回転率を，θ は面積の増大率を，σ，φ はひずみ率およびその主軸方向を表すことがわかる（図 4.2 参照）．$g^{\mu\nu}=-V^\mu K^\nu-K^\mu V^\nu+E_n{}^\mu E_n{}^\nu$ と表されるので $\theta=V^\mu{}_{;\mu}$ と書けることを注意しておく．

式 (4.8) を考慮して，式 (4.6) を式 (4.7) に代入することにより，θ に対する次の方程式が得られる：

$$\frac{d\theta}{dv}=-R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu+2\omega^2-2\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2 \tag{4.11}$$

この方程式はレィチャードリイ (Raychaudhuri) 方程式と呼ばれ，以下で重要な役割を果たす．この式の第1項は，アインシュタイン方程式より

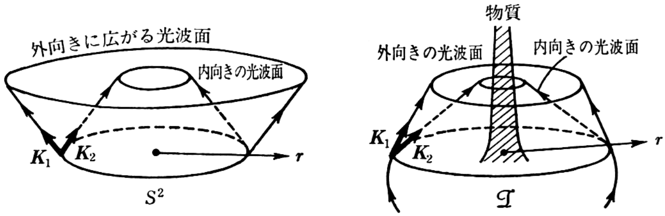
$$R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu=8\pi G\ T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu\ \ (V^\mu V_\mu=0\ \text{に注意}) \tag{4.12}$$

と表されるので物質のエネルギー密度（＋圧力）に比例する．したがってこの項は，光に対しても引力として働くために重力が光波面の拡大率を減少させることを表している．このようにレィチャードリイ方程式は，重力の引力としての性格を測地線の振舞いによって表したものになっている．

4･2　捕　捉　面

A.　閉じた捕捉面

重力が引力であるからといって常に特異点が発生するわけではない．星の重力崩壊や宇宙初期のように，重力が十分強くなる領域が存在することが必要で



ミンコフスキー時空　　　ローレンツ時空における捕捉面

図 4.3

ある．特異点定理ではこの条件を，閉じた捕捉面 (closed trapped surface) の発生としてとらえる．

通常，2次元の空間的な閉じた面（球面を頭に描けばよい）から出た光には内向きに進む光と外向きに広がる光の2種類の進み方がある．ミンコフスキー時空では当然，前者は波面の面積が減少し，後者は増大する．しかしローレンツ時空では外向きに“広がる”光波面の面積が，重力によって内向きに引かれるために減少する場合がある（図 4.3）．このような，その面から出た光波面の面積が常に減少するような 2次元の境界のない閉じた (compact) 空間的面を捕捉面と呼ぶ．

捕捉面 $\mathcal{T}$ は数学的には次のように表される．$\mathcal{T}$ から内向きおよび外向きに出る二つの光測地線束の接ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{K}_{(1)}, \boldsymbol{K}_{(2)}$ としよう．$\boldsymbol{K}_{(i)} (i=1,2)$ はともに $\mathcal{T}$ に直交している．$\boldsymbol{E}_n (n=3,4)$ を互いに直交し，長さが1の $\mathcal{T}$ の接ベクトル場とすると，$\mathcal{T}$ の第2基本形式 $\chi_{(i)mn}$ が

$$\chi_{(i)mn} \equiv K_{(i)\mu;\nu}(E_m{}^\mu E_n{}^\nu + E_n{}^\mu E_m{}^\nu) \tag{4.13}$$

によって定義される．式 (4.8) と比較すると，$\chi_{(i)} \equiv \chi_{(i)nn}$ は $\mathcal{T}$ 上で各光測地線束の面積増大率 $\theta_{(i)}$ と一致することがわかる．したがって，$\mathcal{T}$ が捕捉面である条件は

$$\chi_{(i)} \equiv \chi_{(i)nn} < 0 \qquad (i=1,2) \tag{4.14}$$

と表される．

3章で扱った二つの例では，いずれでも捕捉面が存在することが示される．

まず，球対称な星の重力崩壊の場合には，星の外部では式 (3.19) より $U=$一定が外向きの光波面を，$V=$一定が内向きの光波面を表している．式 (3.18) より $(UV),r/(UV)=-r/r_s(r_s-r)$ となるので，明らかに事象の地平面の内側 $r<r_s$ では光波面の面積は常に減少している．次に一様等方宇宙に対しては

$$u=\eta-\chi,\quad v=\eta+\chi;\quad \eta=\int\frac{\mathrm{d}t}{a},\quad \chi\equiv\int_0\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-Kr^2}} \qquad (4.15)$$

と置くと

$$\mathrm{d}s^2=a^2[-\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+f^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2]:f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\chi & (K>0)\\ \chi & (K=0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\sqrt{|K|}\chi & (K<0)\end{cases} \qquad (4.16)$$

となるので，$u=$一定，$v=$一定がそれぞれ外向き，内向きの光波面を表している．これらの光波面の表面積 S は $4\pi r^2$ $(r\equiv af)$ と表されるので，その増大率は

$$\frac{S'}{S}=\frac{a'}{a}\pm\frac{f'}{f}\quad(+:u=\text{一定},\ -:v=\text{一定});\quad '=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \qquad (4.16)$$

で与えられる．例えば $K=0$ で $a=a_0\eta^n$ の場合は，$\chi>\frac{1}{n}\eta$ で S' は常に正となる．したがって，過去に向かって見たとき捕捉面が存在する（図 4.4).

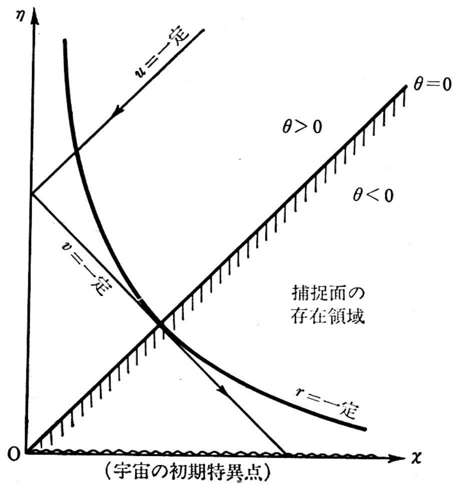


図 4.4　一様等方宇宙における過去向きの球面波の面積増大率 θ の振舞い

B. 捕捉面の光学的性質

次節で示すように，捕捉面の発生が時空の特異点の発生を伴う理由は，捕捉面から出た光の波面が“有限な時間”で一点に収束する結果，捕捉面で囲まれた領域内の物質（および時空領域）が有限時

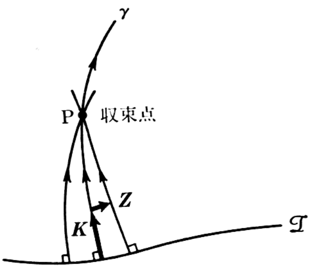


図 4.5

間で一点につぶれてしまうことにある．そこで，この捕捉面の光学的性質を数学的に証明しておこう．

光の測地線束の測地線間の間隔を表すベクトル $\boldsymbol{Z}$ は式 (4.6) に従う．特に，捕捉面 $\mathcal{T}$ に垂直な光の測地線 γ に対して，$\mathcal{T}$ に垂直で γ のすぐ近くから出た光の測地線束が γ 上の点Pで収束するとすると（図 4.5），$\boldsymbol{Z}$ は次の条件を満たしている：

$$\begin{cases} \text{P で} \quad Z^m=0 \\ \gamma \text{ と } \mathcal{T} \text{ の交点で} \quad \dfrac{\mathrm{d}Z^m}{\mathrm{d}v}=\chi_{mn}Z^n \end{cases} \tag{4.17}$$

このようなヤコービ場が存在するとき，P は γ にそって $\mathcal{T}$ と共役な点であるという．

実は，任意の光的ベクトル $\boldsymbol{K}$ に対して常に $R_{\mu\nu}K^\mu K^\nu \geqq 0$ が成り立てば，捕捉面 $\mathcal{T}$ に対しては，それを垂直によぎる任意の光の測地線 γ 上の $\mathcal{T}$ から有限なアフィン距離（アフィン径数 v で測った距離）のところに共役な点が存在することが示される．証明は次の通りである．

γ を含む $\mathcal{T}$ に垂直な光の測地線束に対しては $\omega=0$ となることが示されるので，レィチャードリイ方程式より

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v}=-R_{\mu\nu}K^\mu K^\nu-2\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2\leq-\frac{1}{2}\theta^2 \qquad (\boldsymbol{K}\text{は }\gamma\text{ の接ベクトル}) \tag{4.18}$$

すでに述べたように，$\theta(0)$ は考えている光測地線束に対する第2基本形式の跡 χ に等しい．これより

$$\theta(v)<\frac{1}{\dfrac{1}{2}v+\dfrac{1}{\chi}} \qquad \left(v<-\frac{2}{\chi}(>0)\right) \tag{4.19}$$

したがって v が $-2/\chi$ になる前に $\theta\to-\infty$，すなわち光測地線束は γ 上に収束する（もちろん，γ がそこまで伸びているとして）．

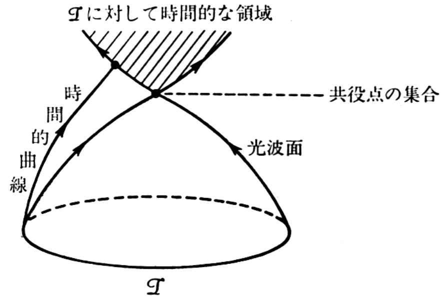


図 4.6

この命題は，捕捉面から出た光波面が有限なアフィン距離で収束することを示しているが，特異点定理の証明には十分でない．実は，この命題からもう少し強いことがいえる．すなわち，$R_{\mu\nu}$ が上述と同じ条件を満たすとすると，捕捉面 $\mathcal{T}$ を垂直によぎる光測地線上の $\mathcal{T}$ から十分離れた点は，常に $\mathcal{T}$ と時間的な曲線で結ばれることが示される．直観的な状況は図 4.6 に示したようになっている．光は最大速度で進むので，収束するまでは当然測地線上の点と $\mathcal{T}$ を時間的な曲線，すなわち光速より遅い速度で進む粒子の軌跡で結ぶことはできない．しかし，いったん収束して再び広がった光の測地線に対してはこの性質はもはや成立しない．厳密な証明は非常に技術的でやっかいであるので省略する．基本方針は，光測地線のうち $\mathcal{T}$ との交点と共役点を超えた点を結ぶ部分が，ヤコービ場にそって適当に少し変形することによって時間的な曲線になることを示すことである．詳しくはホーキング-エリス (Hawking-Ellis) の教科書[30]を参照してほしい．

4·3　特異点定理

A.　時空の特異点

時空の特異点の発生を議論するためには，まずそれを明確に定義しておかねばならない．3章で扱った例で現れた時空の特異点はいくつかの特徴をもっている．まず第一に，その点には有限な時間で“到達”することができるが，決してその先に進めない．第二に，その点に近づくほど曲率テンソルから作られるスカラー不変量の一部は限りなく大きくなる．

時空が“一点につぶれた”という意味では，第二の性質が特異点の定義としては直観的にわかりやすい（曲率特異点）．この定義を採用すると，アインシュタイン方程式が直接規定しているのがリッチテンソルという特別な曲率テン

ソルの組のみであるので，ビヤンキ恒等式を利用して曲率テンソルの振舞いを決定することになる．ところが，ビヤンキ方程式は複雑な偏微分方程式であるため，時空の特異点のような大域的構造の研究は非常に困難となる．

そこで特異点定理では，上で述べた特異点の諸性質のうち第一のものに着目する．すなわち，有限な長さをもちかつそれ以上伸ばすことのできない測地線（不完備測地線）が存在するとき，時空は特異点をもつと定義することにする（測地的不完備性）．もちろん，光測地線に対して幾何学的な長さはゼロとなるのでアフィン径数で長さを測ることにする．明らかに曲率特異点が存在すれば時空は測地的に完備でない．しかし逆は一般に成り立たない[30]．

B. 特異点定理

ペンローズ－ホーキングの一連の特異点定理のうち，最も単純なものは次のペンローズの定理である[5]．

定理 1

次の四つの条件を満たす時空は完備でない光測地線をもつ：

C1. 任意の光的ベクトル $\boldsymbol{K}$ に対して $R_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu}\geqq 0$.

C2. コーシー面 $\mathscr{H}$ が存在する．

C3. $\mathscr{H}$ は連結でかつ開いている（non-compact）．

C4. 閉じた捕捉面 $\mathscr{T}$ が存在する．

C1 は，アインシュタイン方程式より $T_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu}\geqq 0$ となり，ある意味で物質のエネルギー密度の正値性を表している．通常の物質ではこの条件は満たされている．特に理想流体に対しては，この条件は $\rho+P\geqq 0$ と表される．

C2 は，任意の端点のない光的ないし時間的な曲線と常に交わる面 $\mathscr{H}$ が存在することと同等である．この条件は，波動方程式のような双曲型の方程式の解が適当な空間面上の値（初期条件）のみによって決まるために必要となる．したがって C2 は自然な条件である．さらにこの条件を満たす時空は $\mathscr{H}\times\boldsymbol{R}$（$\boldsymbol{R}$ は実数の集合）と同相になることが示される．C4 は，前節で述べたように，十分重力場が強い領域が存在することを表す条件である．

証明の概要は次の通りである．$\mathscr{T}$ から出発した光的ないし時間的な曲線が通

過する点の全体を $J^+(\mathcal{T})$，その境界（位相的な意味での）を $\dot{J}^+(\mathcal{T})$ とする．このとき，条件 C2 より $\dot{J}^+(\mathcal{T})$ は $\mathcal{T}$ から未来に向かって進む $\mathcal{T}$ に垂直な光測地線の集まりであることが示される．

もし，時空が任意の光測地線に対して完備であるとすると，前節で証明した命題より，C1 および C4 の条件はこれらの測地線がすべて有限なアフィン径数で $\dot{J}^+(\mathcal{T})$ から離れて $J^+(\mathcal{T})$ の内部へ入ってしまうことを意味する．したがって，$\dot{J}^+(\mathcal{T})$ は 3 次元のコンパクトな多様体となる（図 4.7 参照）．一方，C2 より時間的で互いに交わらない滑らかな曲線で時空を埋めつくすことができ，しかもこの連続曲線は $\dot{J}^+(\mathcal{T})$ から $\mathcal{H}$ への一対一の滑らかな写像を与えることが示される．この対応によって，$\dot{J}^+(\mathcal{T})$ は $\mathcal{H}$ の中の境界のないコンパクトな 3 次元多様体に移される．ところが，C3 より $\mathcal{H}$ はこのような多様体を含みえない．これは矛盾である．したがって，すべての光測地線が完備ではありえない．

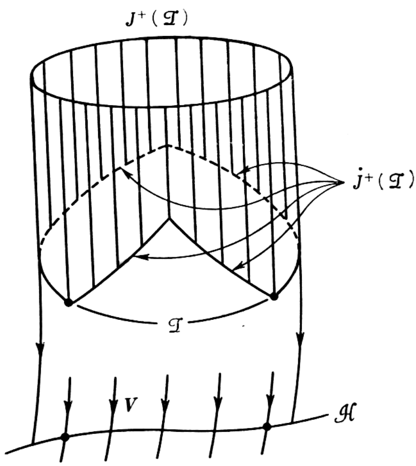


図 4.7

この定理は，星の重力崩壊や空間的に開いた膨張宇宙では特別な対称性がなくとも一般に特異点が発生することを意味している．ただ空間的に閉じた宇宙については何もいえない．この場合についてはホーキングによる次の強力な定理が存在する[6)]．

定理 2

次の三つの条件を満たす時空には未来向き（過去向き）に完備でない時間的測地線が存在する：

C1. 任意の光的ないし時間的ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geqq 0$.

C2. 端のないコンパクトな空間的 3 次元面 $\mathcal{S}$ が存在.

C3. $\mathcal{S}$ は未来向き（過去向き）の単位ベクトルにそって至るところ面積が減少している．

この定理は定理1と異なり，特異点が未来にあるのか過去にあるのかという情報を含んでいる．特に C1 の条件を満たす限り，空間的に閉じた膨張宇宙では，過去には必ず特異点があることとなる．両定理のもう一つの大きな違いは，定理1が光測地線を問題にしているのに対し，定理2が時間的測地線に対するものである点である．対応して $R_{\mu\nu}$ に対する条件が異なっている．例えば，理想流体に対して定理2の条件 C1 は $\rho+P\geqq 0$ かつ $\rho+3P\geqq 0$ となる．これに対して定理1は前者の条件のみを要求している．

このように両定理は，互いに相補的なものとなっている．より一般的な定理がホーキングとペンローズによって証明されている[7]．これらの定理の内容および，特異点定理の厳密な定式化と証明についてはホーキング－エリスの教科書[30]を参照してほしい．

C. 特異点定理の問題点

特異点定理は，時空の特異点の発生がアインシュタイン方程式の解の一般的性質であることを示した，古典相対性理論の研究における金字塔ともいえる成果であるが，依然として様々な未解決の問題も残されている．

その中で最大の問題は，それが特異点の構造については何も教えてくれない点である．特に，測地的な不完備性はどのような場合に曲率特異点の存在を意味するのかは明らかでない（この問題についての最近の研究については文献31）の総合報告を参照）．もう一つの問題は，特異点の位置に関するものである．特に，重力崩壊の場合に特異点が事象の地平面によってわれわれの世界から隠されるのかどうかという点は全く不明である．これらの問題に答えることは，特異点の現実の世界での役割を考えるうえで非常に重要な課題といえる．

5章 正エネルギー定理

物理系の安定性を判定する方法としてよくエネルギーが利用される．これは物理系が常により低いエネルギー状態へ移ろうとする性質をもつことに根ざしている．もちろん，その差額分のエネルギーが外界へ自由に放出されることを前提とする．この判定法に従うと，そのとりうるエネルギーに下限のある系は，放置されると最終的には最低エネルギー状態に達し，安定にその状態にとどまる．一方，エネルギーに下限のない系は次々と低いエネルギー状態へ移行することにより，原理的には無限のエネルギーを放出することになる（エネルギーカタストロフ）．

ニュートン理論に従うと，重力相互作用をする系はまさに，このエネルギー底なしの系となっている．したがって，重力以外の力で支えることのできなくなった天体は，重力崩壊とともにエネルギーカタストロフを引き起こすことが予想される．しかし，現実の宇宙では，星の重力崩壊のような重力不安定に伴うカタストロフィックな現象が頻繁に起こっているにもかかわらず，それがエネルギーカタストロフを伴っている様子はない．

このパラドックスを解決する可能性として，量子効果と一般相対的効果の二つが考えられる．すでに3章で詳しく述べたように，通常の物質の量子効果では重力崩壊を止めることはできない．したがってこの可能性は望みうすである．そこで誰しも，一般相対論的効果によってエネルギーカタストロフが回避されるのではないかと期待したくなる．この期待に対して，古典的な範囲内で肯定的な形で答えるのが正エネルギー定理である．

5・1　宇宙検閲仮定

もちろん，古典相対性理論でも常にエネルギーカタストロフがさけられるわけではない．重力が，原理的にエネルギー的に底なしの性質をもつという点は変わらない．例えば，シュヴァルツシルト計量 (3.10) は $M<0$ でもアインシュタイン方程式の解である．この時空は全エネルギーが負の系になっている．M に下限はない．したがって，星が重力崩壊の過程でもともともっていたエネルギーを越えるエネルギーを放出して，最終的に $M<0$ のシュヴァルツシルト計量で記述される時空を生み出す可能性は単純には否定されないわけである．

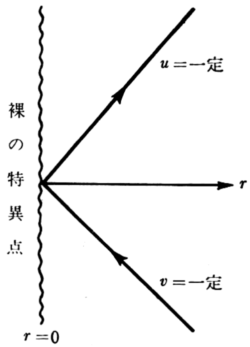


図 5.1　$M<0$ のシュヴァルツシルト時空

ただ，この時空は3章で考えた $M>0$ のものと構造の上で大きく異なった点がある．それは事象の地平面が存在しないことである（図 5.1 参照）．すなわち $r=0$ の特異点が裸で見えている（裸の特異点）．特異点はそこで時空構造がこわれているところであるから，それが裸で見えたのでは何が起こるか予想不可能となる．

この問題を回避する最もてっとり早い方法は，質量が保存される球対称重力崩壊の場合のように，うまい具合に事象の地平面が発生して，それが特異点を外界から隔離すると仮定することである．すなわち，宇宙は検閲がきびしくて，特異点が裸で目に見えることは許されないと考えるわけである (cosmic censorship hypothesis)[31]．

もちろん，この仮定が現実に成立しているかどうかは不明である[31]．例えば，重力相互作用のみをする粒子からなるガスの球状の層という単純化された系では，最初に適当な速度分布を与えると，事象の地平面が発生する前に層が無限に薄くつぶれるようにできる (shell-crossing singularity. 図 5.2 参照)．また，球対称からずれたブラックホール時空の中には，ワイル (Weyl) 解や冨

松-佐藤解のように，正の質量をもちながら裸の特異点の存在する解もある[32]．これらの例は，特殊な状況では宇宙検閲仮定が成立していないことを示している．宇宙検閲仮定がどのような状況で成立するのかを明らかにすることは，古典一般相対性理論に残された最大の問題である[31]．

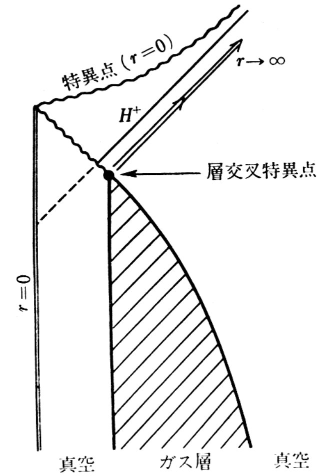


図 5.2　圧力ゼロのガス層の重力崩壊

5·2　局所的なエネルギーの正値性の仮定

エネルギーカタストロフを防止するうえで必要なもう一つの仮定は，物質のエネルギーが局所的に，すなわち重力の作用が無視できる場合に負にならないことである．

単純に考えると，速度 V^μ で運動する観測者の見た物質のエネルギー密度は $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ と表されるので，単に任意の時間的ベクトル V^μ に対して $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geqq 0$ を要求すれば十分に思える (weak energy condition)．しかし正エネルギー定理を証明するには今のところ，次のようなもっと強い条件 (dominant energy condition) が必要である：任意の未来向きの時間的ベクトル V^μ, W^μ に対して $T_{\mu\nu}V^\mu W^\nu \geqq 0$．この条件は $T^{\mu\nu}$ が4個の固有値 ρ, P_i $(i=1\sim3)$ をもつ場合には $\rho\geqq 0$ かつ $-\rho\leqq P_i\leqq\rho$ という条件で表される．なぜこの条件が必要であるのかを直観的に理解するのは困難である．

5·3　全エネルギーの定義

ニュートン理論では，全エネルギーは

$$E\ (\text{全エネルギー}) = E_{\rm M}\ (\text{物質のエネルギー}) + E_{\rm G}\ (\text{重力のエネルギー}) \tag{5.1}$$

と定義され，$E_{\rm M}$, $E_{\rm G}$ は物質のエネルギー密度 ρ，質量密度 μ，ポテンシャル

ϕ を用いて

$$E_{\mathrm{M}}=\int_{\Sigma}\rho\,\mathrm{d}^3x,\qquad E_{\mathrm{G}}=\int_{\Sigma}\phi\mu\,\mathrm{d}^3x \tag{5.2}$$

と表される．ここで，Σ は時間一定の3次元面である．

これらの公式を一般相対論に広げようとすると直ちに大きな困難にぶつかる．式 (5.2) の E_{M} に相当する最も単純な量は $\int_{\Sigma}T_{00}\,\mathrm{d}^3x$ であるが，これは座標変換に対して不変でない．これを不変にするには，例えば適当な未来向きの時間的ベクトル V^{μ} と空間的面 Σ の“面積”要素

$$\mathrm{d}\Sigma^{\mu}=n^{\mu}\,\mathrm{d}\Sigma \tag{5.3}$$

を使って（n^{μ} は未来向きの Σ の単位法ベクトル，$\mathrm{d}\Sigma$ は3次元体積要素）

$$E_{\mathrm{M}}=\int_{\Sigma}T_{\mu\nu}V^{\mu}\mathrm{d}\Sigma^{\nu} \tag{5.4}$$

とすればよい．しかし，V^{μ} として採用すべき特別なベクトルは一般には存在しない．

重力のエネルギーについては問題はより深刻である．ニュートン理論のポテンシャルに相当する共変的なスカラー量は存在しない．しかも相対論では，一般座標変換によって局所的には常に重力場を消し去る（すなわち $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}=0$ とする）ことができる．これは重力場の局所的なエネルギー密度という概念が存在しえないことを意味している．

これらの困難は，相対論では全エネルギーという概念が一般には意味を失うことを意味している．しかし幸いなことに，重要な例外が存在する．もともとわれわれが全エネルギーを問題にした理由は，星の重力崩壊のような局所的な現象がエネルギーカタストロフを起こすかどうかを知りたかったことにある．このような局所的な現象を問題にする限り，系から十分離れた所では，時空は十分ミンコフスキー時空に近いと考えてよいであろう．実はこのような場合に問題を限ると，全エネルギーが定義できるのである．

より正確には，時空構造が系からの距離とともにミンコフスキー時空に漸近する場合を考える（漸近的に平坦な時空，以下 AF 時空）：

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+O\left(\frac{1}{r}\right),\ g_{\mu\nu,\lambda}=O\left(\frac{1}{r^2}\right)\quad:\quad r=\sqrt{x^ix^i}\to\infty \tag{5.5}$$

特に，計量成分がこの条件を満たす座標を AF 座標と呼ぶ．AF 座標を使って系の全エネルギー運動量ベクトル P_μ を

$$P_\mu=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{16\pi G}\oint_{\partial\Sigma}U_\mu{}^{\lambda\sigma}\,d\Sigma_{\lambda\sigma} \tag{5.6}$$

と定義する．ここで Σ は $x^ix^i\leqq r^2$ となる空間的な3次元面，$\partial\Sigma$ はその境界，$d\Sigma_{\lambda\sigma}$ は

$$d\Sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,dx^\lambda\,dx^\sigma\ (\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\text{ は完全反対称テンソルで }\epsilon_{0123}=\sqrt{-g}) \tag{5.7}$$

で定義される2次元面積要素，$U_\mu{}^{\lambda\sigma}$ はランダウ－リフシッツ（Landau-Lifshitz）の超ポテンシャルと呼ばれる量で次式で与えられる[16]：

$$U_\mu{}^{\lambda\sigma}=[(-g)(g^{\mu\lambda}g^{\alpha\sigma}-g^{\mu\sigma}g^{\alpha\lambda})]_{,\alpha}/\sqrt{-g} \tag{5.8}$$

式（5.5）より式（5.6）の極限が有限な値に収束することは容易にわかる．さらに，無限遠での表面積分で表されているので，P_μ は局所的な AF 座標の変換によって変わらない．また Σ の局所的な変形によっても不変である．これは広い意味での全エネルギーの保存則を表している．

この定義が確かに全エネルギーを表していることはいくつかの例から確認できる．まず，重力場が弱く速度が光速に比べて小さい極限ではニュートン理論の全エネルギーと一致する．第2に，シュヴァルツシルト時空に対しては $(P^\mu)=(M,\ 0,\ 0,\ 0)$ となる．最後に，Σ の境界 $\partial\Sigma$ から Δt の間に外へ流れ出るエネルギー運動量 ΔP_μ は，r が十分大きいとき

$$\Delta P_\mu=\int_{\partial\Sigma\times\Delta t}T_\mu{}^\nu d\Sigma_\nu \tag{5.9}$$

と表される．すなわち，通常のミンコフスキー時空でのエネルギー運動量流束の積分で与えられる．

これまで明確に述べなかったが，式（5.6）の極限移行には一つ注意すべき点がある．それは，どのような方向で無限遠に行くかということによって P_μ

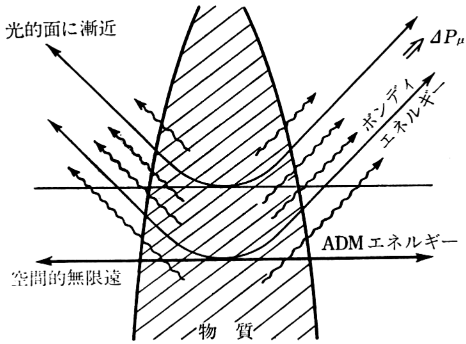


図 5.3　ADM エネルギーとボンディエネルギー

の値と意味が変わってしまうことである．以下では，空間的な方向にそって無限遠にゆく場合と光波面の広がりにそって無限遠にゆく場合の二つの場合のみを考える．前者に対応する P_μ は ADM 4 元運動量，後者に対応する P_μ はボンディ（Bondi）4 元運動量と呼ばれる[33]．ADM 4 元運動量は Σ（至るところ空間的な 3 次元面）のとり方によらない完全な保存量である．一方，ボンディ 4 元運動量は，Σ が無限遠において漸近する光的面のとり方によって値が異なる．その差は二つの光波面の間で系から無限遠に放出された 4 元運動量と一致する（図 5.3)．

最後に，空間的な無限遠で漸近的に平坦（空間的 AF）という条件と光的な無限遠で漸近的に平坦（光的 AF）という条件は必ずしも一致しないことを注意しておく[34]．しかも，空間的かつ光的 AF 時空でも，ADM 4 元運動量とボンディ 4 元運動量の関係は現在のところ不明である[35]．

5·4　正エネルギー定理

漸近的に平坦な時空の全エネルギーが非負であろうという予想は，かなり古くからあった[36]．特に，1957 年に重力波のみが存在する系の全エネルギーが正であることがウェーバー（Weber）とホウィーラー（Wheeler）によって示されて以来[37]，多くの人々がこの予想を証明しようと試みてきたが，ほとんど

大きな進展はなかった．ところが，ここ 4, 5 年の間にこの予想は一挙に一般的な形で肯定的に証明されてしまった．その内容は次のようなものである．

定理 3

空間的ないし光的 AF 時空において，$T_{\mu\nu}$ が主エネルギー条件（dominant energy condition）を満たすならば，全エネルギー運動量ベクトル P_μ は未来向きの時間的ないし光的ベクトルである．特に空間的 AF 時空で $P_\mu=0$ であるか，光的 AF 時空で P_μ が光的ならば，時空はミンコフスキー時空である．

この定理において P_μ が時間的であるという条件は，無限遠の適当な観測者に対して $(P^\mu)=(M, 0, 0, 0)$ と表されることを意味し，それが未来向きという条件は $M\geqq 0$ に対応する．一般には $M^2=-P_\mu P^\mu(\geqq 0)$ となる．

現在のところ，この定理には 2 種類の証明法が存在する．一つはショーエン（Shoen）とヤウ（Yau）による，多様体上の非線形微分方程式の大域的研究に基づくものである[8]．この方法は高次元への拡張性はあるが，非常に数学的色彩の強い証明であり，しかも背理法によっているので物理的意味がわかりにくいという欠点をもつ．これに対してウィッテン（Witten）によるもう一つの方法は[9]，スピノールという一見古典論にとって異質なものを利用しているものの，全エネルギーを具体的に非負の量の空間積分で表している点で見通しがよい．そこで以下では，ネスター（Nester）[10] によって改良されたウィッテンの証明の概要を紹介する．

P_μ を定義するのに使った空間的な面 Σ は，本来十分遠方で定義されていさえすればよいが，定理を証明するにはそれを内部にまで広げる必要がある．以下では，Σ は至るところ空間的で境界のない 3 次元面で，位相的に $\boldsymbol{R}^3$ と等しくかつその面の近傍では時空は正則であると仮定する．宇宙検閲仮定より，時空の十分過去の部分でこのような空間的な面 Σ_0 が一つとれれば，たとえ途中で重力崩壊によって特異点が発生しても，かってに与えられた無限遠での Σ をこの条件を満たすように広げることができる（図 5.4 参照）．この条件をゆるめるためには，宇宙検閲仮定より少し強い条件が必要となる[13]．

ウィッテンの証明は Σ 上のスピノールを利用する．そこでまずスピノール

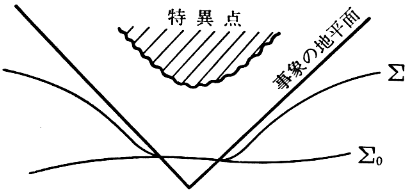


図 5.4

の共変微分を定義しておこう[38]．Σ 上に互いに直交する単位長さの4本のベクトル場の組（4つ組）$\{e_{\underline{a}}{}^{\mu}\}(a=0\sim3)$ を，$e_{\underline{0}}{}^{\mu}$ が Σ の未来向きの単位法ベクトル n^{μ} と一致し，$e_{\underline{i}}{}^{\mu}(i=1\sim3)$ が Σ に接するようにとる．このとき $g^{\mu\nu}=\eta^{\underline{ab}}e_{\underline{a}}{}^{\mu}e_{\underline{b}}{}^{\nu}$ となる．さらに，$\gamma^{\underline{a}}$ を通常のディラック行列として $\gamma^{\mu}\equiv e_{\underline{a}}{}^{\mu}\gamma^{\underline{a}}$ とすると，γ^{μ} は次のような反交換関係を満たす：

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}=-2g_{\mu\nu} \tag{5.10}$$

これらの量を使って4次元スピノール ψ の共変微分を

$$\nabla_{\mu}\psi\equiv\partial_{\mu}\psi+\Gamma_{\mu}\psi \quad : \quad \Gamma_{\mu}=\frac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} \tag{5.11}$$

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha},\ \gamma_{\beta}] \tag{5.12}$$

$$\omega_{\mu}{}^{\alpha\beta}=\eta^{\underline{ab}}e^{\beta}{}_{\underline{a}}e^{\alpha}{}_{\underline{b};\mu} \tag{5.13}$$

$$\nabla_{\mu}\bar{\psi}\equiv\partial_{\mu}\bar{\psi}-\bar{\psi}\Gamma_{\mu} \quad : \quad \bar{\psi}\equiv\psi^{+}\gamma^{\underline{0}} \tag{5.14}$$

で定義する．このように定義された共変微分に対して，$\nabla_{\nu}\gamma_{\mu}=0$ となることが容易に示される．

ウィッテンの証明のアイデアは，スピノールを用いることにより，表面積分で表された P_{μ} に対する表式を非負の量の Σ 上の体積積分に書き換えることにある．まず，遠方（$r\to\infty$）で定数に近づくスピノール（AC スピノール）

$$\psi=\psi_0+O\left(\frac{1}{r}\right),\qquad e_i{}^{\mu}\psi_{,\mu}=O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad : \quad r\to\infty \tag{5.15}$$

を使って反対称テンソル（ネスターテンソル）[10]を

$$E^{\mu\nu}\equiv2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_{\alpha}\nabla_{\beta}\psi-\nabla_{\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_{\alpha}\psi) \quad : \quad \gamma_5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{5.16}$$

で定義する．AF 条件（5.5）より，AF 座標では4つ組が

$$e_{\underline{a}}{}^{\mu}=\delta_{\underline{a}}{}^{\mu}+O\left(\frac{1}{r}\right),\qquad e^{\mu}{}_{\underline{a},\nu}=O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{5.17}$$

を満たすようにとれることを利用すると

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{\partial\Sigma} E^{\mu\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = -16\pi G P_\mu V_0^\mu \tag{5.18}$$

が成り立つことが少し計算してみるとわかる[33]．ここで $V_0^\mu \equiv \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0$ である．V_0^μ は常に未来向きの時間的ベクトルとなっている．

一方，恒等式

$$[\nabla_\mu, \ \nabla_\nu]\psi = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\, \psi \tag{5.19}$$

$$G^\alpha{}_\beta = \frac{1}{4}\,\epsilon^{\alpha\gamma\delta\lambda} R^{\mu\nu}{}_{\gamma\lambda}\, \epsilon_{\delta\mu\lambda\beta} \tag{5.20}$$

を考慮して，式（5.18）の左辺をストークス（Stokes）の定理を使って体積積分に直すと

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{\partial\Sigma} E^{\mu\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = \int_\Sigma \nabla_\nu E^{\mu\nu}\mathrm{d}\Sigma_\mu$$

$$= \int_\Sigma [2G^\mu{}_\nu V^\nu n_\mu + 4\delta^{\underline{i}\underline{j}}(\nabla_{\underline{i}}\psi)^\dagger(\nabla_{\underline{j}}\psi) + 4(\nabla_{\underline{j}}\psi)^\dagger \gamma^{\underline{j}}\gamma^{\underline{k}}\nabla_{\underline{k}}\psi]\mathrm{d}\Sigma \tag{5.21}$$

となる．ここで $V^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$，$\nabla_{\underline{i}}\psi \equiv e_{\underline{i}}{}^\mu \nabla_\mu \psi$ である．

さて，ここで ψ が次の方程式（ウィッテン方程式）

$$\not{D}\psi \equiv \gamma^{\underline{i}}\nabla_{\underline{i}}\psi = 0 \tag{5.22}$$

を満たすものとしよう．$\not{D}^2$ は式（5.10），（5.19）より

$$\not{D}^2 = \delta^{\underline{i}\underline{j}}\nabla_{\underline{i}}\nabla_{\underline{j}} + (\text{1階微分ないし微分を含まない部分}) \tag{5.23}$$

と変形されるので，$\not{D}$ は楕円型の作用素である．したがって，式（5.22）は（5.15）の境界条件のもとでは各 ψ_0 に対して1個ずつ解をもつ．すなわち，ウィッテン方程式には4個の線形独立な AC スピノール解が存在する（ウィッテンスピノール）．

ウィッテンスピノールに対しては式（5.21）の右辺の最後の項はゼロとなる．したがって式（5.18）と合わせると，結局

$$-P_\mu V_0^\mu = \int_\Sigma \left[T_{\mu\nu}V^\mu n^\nu + \frac{1}{4\pi G}\delta^{\underline{i}\underline{j}}(\nabla_{\underline{i}}\psi)^\dagger(\nabla_{\underline{j}}\psi)\right]\mathrm{d}\Sigma \tag{5.24}$$

という表式を得る．右辺は主エネルギー条件より常に非負である．上に述べたウィッテン方程式の解の数より，V_0^μ としては少なくとも独立な4個の未来向

きの時間的ベクトルが可能である．したがって，P^μ は未来向きの時間的ないし光的ベクトルとなる．P^μ がゼロないし光的な場合についての主張の証明は少し複雑であるのでここでは省略する[33]．

5·5　エネルギーカタストロフ問題への応用

不安定性に対する一般的なエネルギー判定法に従えば，正エネルギー定理がその適用可能な系のエネルギー的安定性を保証していることは明らかである．特にボンディエネルギーの正値性は，星の重力崩壊によって放出されるエネルギーが，星が最初にもっていたエネルギーを超えないことを保証している．

このように，重力は重力崩壊のように時空構造の崩壊を伴うカタストロフィックな現象を引き起こすと同時に，それを外界から隠して無害にするという相補的な性格を併せもっているのである．これら二つの性格がともに，重力が普遍的な引力として働くという点に根ざしていることは非常に興味深い．ただし，事象の地平面の発生による特異点の無害化が，どの程度一般的状況のもとで機能するのかは，現時点では不明であるという点を最後にもう一度強調しておこう．

6章　ブラックホールの蒸発

これまでは話を主に古典論の世界に限ってきた．古典的世界では，ニュートン理論，相対論のいずれでも，重力の効果はそれが常に引力として働くということでほぼ理解できた．それでは量子論が重要となる世界ではどうであろうか．

量子論的世界といっても実はいろいろなレベルが存在する．一番身近なのは原子や分子などの通常の（非相対論的）量子力学によって記述される世界である．このような世界では，物質を構成する粒子の振舞いは古典的世界の場合と大きく異なっており，量子効果は物質の性質を決定するうえで重要な役割を果たす．しかし，通常の量子力学の対象となる低エネルギー（エネルギー＜1 MeV）の現象では，重力は電磁力等に比べて無視できるほど小さい．このため，このレベルの世界において重力が決定的な役割を果たすことはない．

次のレベルは相対論的量子力学の世界である．粒子のエネルギーがその質量に比べて大きくなると，粒子の速度は光速に近づき，特殊相対論の枠組みの中で扱わねばならなくなる．このレベルの世界を記述するために，生み出されたのが場の量子論と呼ばれる理論形式である．この理論では，物質の記述は通常の量子力学と大きく異なってくる．特に，物質粒子と場は対等の存在となる．例えば，電磁場は光子と呼ばれる粒子（正確には量子）の集団として表されるようになる．その結果として，この理論では，粒子数が保存しない反応が許されるようになる．

このような粒子数の保存されない世界では，もはや物質の振舞いが単にそれを構成する粒子の運動という形のみではとらえられない以上，重力の効果は古

典論の場合と大きく異なっていることが予想される．実際，ホーキングは星の重力崩壊によって生み出されるブラックホール時空において，場の量子論で記述される物質の振舞いを調べることによりブラックホールの蒸発という非常に興味深い現象を発見した．

本章では，このブラックホールの蒸発という現象のメカニズムと，それのもたらす新たなカタストロフ現象について解説する．

6·1　場の量子論

まず準備として，場の量子論という理論形式について簡単に説明しておこう．簡単のために，スピンも内部量子数ももたないボーズ統計に従う自由粒子に話を限る．

A. ミンコフスキー時空における場の量子論

自由なボーズ粒子の系を記述する最も簡単な方法は，粒子数の運動量分布 $N_{\boldsymbol{p}}$（$N_{\boldsymbol{p}}$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ粒子の個数）によって状態を表すことである（以下簡単のために，粒子は十分大きい有限な体積 V の箱の中に閉じ込められているとする．このとき $\boldsymbol{p}$ は離散的な値をとる．無限体積に移行するには $\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{p}$ とすればよい）．この記述法では，$\hat{N}_{\boldsymbol{p}}$ を $N_{\boldsymbol{p}}$ に対応する作用素，$|\{N_{\boldsymbol{p}}\}>$ をその固有状態

$$\hat{N}_{\boldsymbol{p}}|\{N_{\boldsymbol{q}}\}> = N_{\boldsymbol{p}}|\{N_{\boldsymbol{q}}\}> \tag{6.1}$$

とすると，任意の状態は様々な粒子数の運動量分布 $\{N_{\boldsymbol{p}}\}$ をもつ固有状態 $|\{N_{\boldsymbol{p}}\}>$ の重ね合わせで表される．また $\hat{N}_{\boldsymbol{p}}$ を用いると，粒子の質量を m としてハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{p}} \hbar\,\omega_{\boldsymbol{p}}\,\hat{N}_{\boldsymbol{p}} \quad : \quad \hbar^2\,\omega_{\boldsymbol{p}}{}^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2 \tag{6.2}$$

と表される．

この系の時間的空間的振舞いを記述するにはさらに波動関数が必要となる．量子力学の対応規則

$$\frac{1}{i\hbar}\nabla \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{p}, \quad i\frac{\partial}{\partial t} \quad \longrightarrow \omega \tag{6.3}$$

に従うと，運動量 $\boldsymbol{p}$ の一粒子の波動関数 $\varphi_{\boldsymbol{p}}(x)$ は A を定数として

$$\varphi_{\boldsymbol{p}}(x)=A\mathrm{e}^{-i\omega_{\boldsymbol{p}}t+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{6.4}$$

で与えられる．通常の量子力学では，$\varphi_{\boldsymbol{p}}(x)$ を $\boldsymbol{p}$ について重ね合わせて得られる波動関数 $\varphi(x)$ に対して $|\varphi(x)|^2$ が粒子の存在確率を与える．ところが，今の場合 $\int|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}^3x$ は一般に時間とともに変化するので，このような解釈は適用できなくなる．このことは，相対論的な粒子系の時間的振舞いを波動関数を用いて直接記述するのは適切でないことを意味している．

この問題は，量子場の作用素という時空座標をパラメータとしてもつ作用素を導入することによって解決される．この作用素を定義するために，まず次のような交換関係を満たす作用素の系 $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}$（$\dagger$ はエルミート共役を表す）を導入しよう：

$$[\hat{a}_{\boldsymbol{p}},\ \hat{a}_{\boldsymbol{p}'}^{\dagger}]=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'},\ [\hat{a}_{\boldsymbol{p}},\ \hat{a}_{\boldsymbol{p}'}]=[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger},\ \hat{a}_{\boldsymbol{p}'}^{\dagger}]=0 \tag{6.5}$$

$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}$ の状態 $|\{N_{\boldsymbol{p}}\}>$ に対する作用は，粒子の全く存在しない状態，すなわち真空 $|0>$ に対する $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ の作用を

$$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}|0>=0 \qquad (\text{任意の } \boldsymbol{p} \text{ に対して}) \tag{6.6}$$

と定義することによって完全に決定される．実際

$$|\{N_{\boldsymbol{p}}\}>\equiv\prod_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{N_{\boldsymbol{p}}!}}(\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger})^{N_{\boldsymbol{p}}}|0> \tag{6.7}$$

$$\hat{N}_{\boldsymbol{p}}\equiv\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}\,\hat{a}_{\boldsymbol{p}} \tag{6.8}$$

と置くと，式 (6.5) より $\hat{N}_{\boldsymbol{p}}$ は

$$\hat{N}_{\boldsymbol{p}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{p}}=\hat{a}_{\boldsymbol{p}}(\hat{N}_{\boldsymbol{p}}-1)\quad,\qquad\hat{N}_{\boldsymbol{p}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}=\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}(\hat{N}_{\boldsymbol{p}}+1) \tag{6.9}$$

を満たすので，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}$ は $\hat{N}_{\boldsymbol{p}}$ の固有値を 1 だけ減少，増加させる作用がある．したがって，式 (6.8) で定義される $\hat{N}_{\boldsymbol{p}}$ の，式 (6.7) で定義される状態への作用は式 (6.1) と完全に一致する．すなわち式 (6.7) を用いて，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}$ の状態 $|\{N_{\boldsymbol{p}}\}>$ に対する作用を決定することができる．$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ は消滅作用素，$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}$ は生成作用素と呼ばれる．

この生成消滅作用素と式 (6.4) で与えられる波動関数を使って，場の作用素 $\hat{\phi}(x)$ を

$$\hat{\phi}(x) \equiv \sum_{\boldsymbol{p}} (\varphi_{\boldsymbol{p}}(x)\hat{a}_{\boldsymbol{p}} + \varphi_{\boldsymbol{p}}(x)^* \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger}) \tag{6.10}$$

と定義する．$\varphi_{\boldsymbol{p}}$ の表式および $\boldsymbol{p}$ と $\omega_{\boldsymbol{p}}$ の関係より，$\varphi_{\boldsymbol{p}}(x)$ したがって $\hat{\phi}(x)$ はクライン-ゴルドン（Klein-Gordon）方程式

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} - \varDelta \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} = 0 \tag{6.11}$$

を満足する．この式より

$$N(\phi,\ \chi) \equiv -i \int \mathrm{d}^3x\, \phi^*(\boldsymbol{x},\ t)\ \overleftrightarrow{\partial}_t \chi(\boldsymbol{x},\ t) \tag{6.12}$$

と置くと，$N(\hat{\phi},\ \hat{\phi})$ という量が時間によらない保存量であることがわかる．したがって，一粒子状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ に対して

$$\langle \boldsymbol{p}| N(\hat{\phi},\ \hat{\phi}) | \boldsymbol{p}\rangle = \langle 0| N(\hat{\phi},\ \hat{\phi}) | 0\rangle + N(\varphi_{\boldsymbol{p}},\ \varphi_{\boldsymbol{p}}) \tag{6.13}$$

となることに注意すると，$\varphi_{\boldsymbol{p}}$ を

$$N(\varphi_{\boldsymbol{p}},\ \varphi_{\boldsymbol{p}'}) = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \tag{6.14}$$

と規格化するのが自然であるという結論が得られる．この規格化に従うと $A = 1/\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{p}}}$ となる．式 (6.5)～(6.14) は特殊相対論の枠内で，自由なボーズ粒子系を時間発展を含めて完全に記述している．

これまでは，粒子描像を出発点として理論を構成したが，最終的にできあがった理論では，粒子のかわりに波動場 $\phi(x)$ をより基本的な実体と見なすことができる．実際，多粒子系に対するすべての物理量は場の作用素 $\hat{\phi}$ を用いて表すことができる．例えば，ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}^3x [\mathscr{H}(\hat{\phi}) - \langle 0| \mathscr{H}(\hat{\phi}) |0\rangle] :\quad \mathscr{H}(\phi) \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{6.15}$$

と表される．また，波動場を出発点とすると，粒子は式 (6.10) を通して，波動場の量子化された波立ち，すなわち場の量子としてとらえることができる．さらに，理論のローレンツ不変性は場の演算子を用いた形式で最も明瞭になる．実際，$\hat{\phi}$ の時間発展を表す式 (6.11) は明らかにローレンツ不変である．また系の量子論的性格を特徴づける交換関係も $\hat{\phi}$ を用いると明確にローレンツ不変な形で表される：

$$[\hat{\phi}(x),\ \hat{\phi}(y)]=i\Delta(x-y;m^2) \quad : \quad \Delta(x;m^2)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\epsilon(p^0)\,\delta(p^2+m^2)e^{ip_\mu x^\mu} \tag{6.16}$$

ここで，$\epsilon(u)=1(u>0)$，$-1(u<0)$.

このように波動場を最も基本的な実体と考え，多粒子系の量子力学をその量子論としてとらえる理論形式を場の量子論と呼ぶ[39].

B. ローレンツ時空における場の量子論

場の量子論という理論形式を利用すると，特殊相対論的量子論をローレンツ時空，すなわち曲がった時空へ拡張することは容易である．そのためには場の方程式（6.11）を一般共変的な形に書き換えればよい．ただし，この書き換えは一意的でない．それはミンコフスキー時空でゼロとなる曲率テンソルへの依存性が全く不定であるためである．以下では，最も簡単な次の形を採用する：

$$\Box\hat{\phi}-m^2\hat{\phi}=0 \quad : \quad \Box\equiv\nabla_\mu\nabla^\mu=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu) \tag{6.17}$$

この方程式の c 数の複素解の完全系 $\{\varphi_I(x),\ \varphi_I(x)^*\}$ を一組選んで，$\hat{\phi}(x)$ を

$$\hat{\phi}(x)=\sum_I[\varphi_I(x)\,\hat{a}_I+\varphi_I(x)^*\,\hat{a}_I{}^\dagger] \tag{6.18}$$

と展開すると，ミンコフスキー時空の場合と同様に生成消滅作用素 $\hat{a}_I$，$\hat{a}_I{}^\dagger$ を導入することができる：

$$[\hat{a}_I,\ \hat{a}_J{}^\dagger]=\delta_{IJ},\ [\hat{a}_I,\ \hat{a}_J]=[\hat{a}_I{}^\dagger,\ \hat{a}_J{}^\dagger]=0 \tag{6.19}$$

ただし，φ_I を規格化するためには，式（6.17）のもとで保存されるような式（6.12）に対応する量が必要となる．この量は Σ をコーシー面として

$$N_g(\varphi,\ \chi)\equiv-i\int_\Sigma d\Sigma^\mu\varphi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi \tag{6.20}$$

で与えられる．右辺は，φ，χ が式（6.17）を満たす限り Σ のとり方に依存しないことが容易に示される[40]．したがって，φ_I の規格化条件は

$$N_g(\varphi_I,\ \varphi_J)=\delta_{IJ} \tag{6.21}$$

となる．

以上のようにして，曲がった時空での自由場の量子論を形式的に構成するこ

とができる．$\hat{\phi}(x)$ の交換関係が共変的な形になることも示される．残る仕事は，波動関数 φ_I を具体的に決めて粒子描像を作り上げることである．実はこれが非常にやっかいな問題なのである．

ミンコフスキー時空では，一粒子波動関数をエネルギーと運動量の固有状態になるという条件で一意的に決めることができた．ところが，一般の曲がった時空では保存量としての全エネルギーや全運動量を共変的な形で定義することはできない．したがって φ_I を決定する自然な条件が存在しないことになる．

ただし，いくつかの例外的な場合が存在する．中でも最も重要な場合は，$t\to\pm\infty$ の極限で時空がミンコフスキー時空に漸近する場合である．この場合には，$t\sim\pm\infty$ でのミンコフスキー時空における一粒子波動関数に漸近する場の方程式の解 $\varphi_{I-}(x)$，$\varphi_{I+}(x)$ を採用すれば，各漸近領域では自然な粒子描像を構成することができる．ただもはや，$\varphi_{I+}(x)$ と $\varphi_{I-}(x)$ が互いに一致するという保証はない．それらは一般に

$$\varphi_{I+}(x)=\sum_J[\alpha_{IJ}\varphi_{J-}(x)+\beta_{IJ}\varphi_{J-}{}^*(x)] \qquad (6.22)$$

という関係で結ばれる（図 6.1 参照）．式 (6.21) より，α_{IJ}，β_{IJ} は，条件

$$\sum_K(\alpha_{IK}\alpha_{JK}-\beta_{IK}\beta_{JK}{}^*)=\delta_{IJ}, \qquad \sum_K(\beta_{IK}\alpha_{JK}-\alpha_{IK}\beta_{JK})=0 \qquad (6.23)$$

を満たしている．場の量子論の立場に立つと，量子論 $\hat{\phi}$ は波動関数のとり方に依存しない実体なので，式 (6.22) は $\varphi_{I\pm}$ に対応する粒子の生成消滅作用素 $\hat{a}_{I\pm}$，$\hat{a}_{I\pm}{}^\dagger$ が

$$\hat{a}_{I+}=\sum_J(\alpha_{IJ}{}^*\hat{a}_{J-}-\beta_{IJ}{}^*\hat{a}_{J-}{}^\dagger) \qquad (6.24)$$

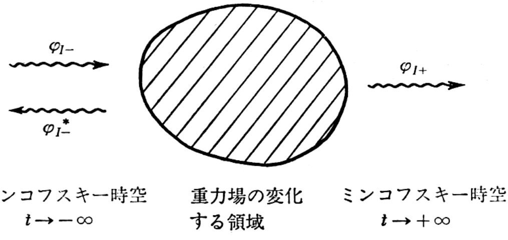


図 6.1

という関係（ボゴリューボフ変換）で結ばれていることを意味する．

真空の定義 $\hat{a}_I|0\rangle=0$ を思い起こすと，式(6.24)はもし $\beta_{IJ}\neq 0$ となると，$t\to\pm\infty$ の二つの領域での真空が一致しなくなることを意味している．したがって，変化する重力場のもとでは粒子の生成が起こることが予想される．

6·2　ブラックホール時空での場の量子論

前節の予想を具体的に確かめるために，球対称な星の重力崩壊によって作られるブラックホール時空での波動関数の振舞いを詳しく調べてみよう．以下，簡単のため粒子の質量 $m=0$ とする．

A.　漸近領域

球対称な星の重力崩壊を表す時空構造は，3章で述べたように図6.2で表される．明らかに $t\to-\infty$ では，時空はミンコフスキー時空と見なしてさしつかえない．したがって，そこでの自然な波動関数は

$$\varphi_{\omega lm-}(x)\longrightarrow \frac{A_l^-}{\sqrt{\omega}}\frac{e^{-i\omega v_-}+e^{-i\omega u_-}}{r}Y_{lm}(\theta,\ \phi)\quad :\quad r\to\infty,\ t\to-\infty \qquad (6.25)$$

という条件で与えられる．ここで $v_-=t+r,\ u_-=t-r$ で $Y_{lm}(\theta,\ \phi)$ は球面調和関数である．

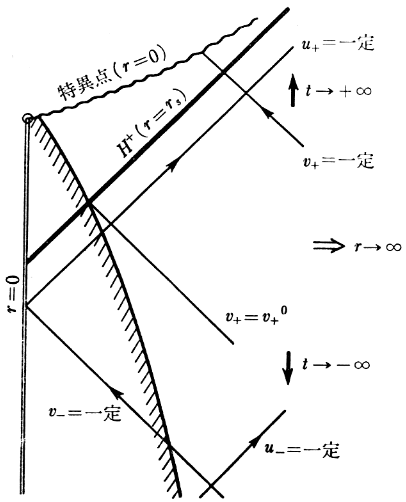


図 6.2　重力崩壊によって作られるブラックホール時空

一方，$t\to+\infty$ に相当する領域は二つの部分からなる．一つはブラックホールの外側（$t\to\infty$ では $r\to\infty$ としてよい），残りはブラックホールの内側である．前者の領域はミンコフスキー時空に漸近するとしてよいので，やはり条件

$$\varphi_{\omega lm+}\longrightarrow \frac{A_l^+}{\sqrt{\omega}}\frac{e^{-i\omega v_+}+e^{-i\omega u_+}}{r}Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\quad :\quad r\to\infty,\ t\to+\infty \quad (6.26)$$

で自然な波動関数が選ばれる．ここで $v_+=t+r+r_s\ln|r/r_s-1|$，$u_+=t-r-r_s$

$\ln|r/r_s-1|$ である．ブラックホールの内側では，一般には自然な波動関数は決まらない．しかし，幸いなことに，この領域での波動関数 $\tilde{\varphi}_{J+}$ に対応する粒子はブラックホールの外部の観測者には見えないので，$\tilde{\varphi}_{J+}$ を具体的に決める必要はない．

B. 粒子生成率

球対称性より，l, m の異なった波動関数が互いに結びつくことはないので，以下添字 l, m を省略する．$t\to\pm\infty$ の波動関数の関係を

$$\varphi_{\omega+}=\int d\omega'[\alpha_{\omega\omega'}\varphi_{\omega'-}+\beta_{\omega\omega'}\varphi_{\omega'-}{}^*] \tag{6.27}$$

と表すと，対応する生成消滅演算子 $\hat{a}_{\omega\pm}$, $\hat{a}_{\omega\pm}{}^\dagger$ は，式 (6.24) より

$$\hat{a}_{\omega+}=\int d\omega'[\alpha_{\omega\omega'}{}^*\hat{a}_{\omega'-}-\beta_{\omega\omega'}{}^*\hat{a}_{\omega'}{}^\dagger{}_-] \tag{6.28}$$

と表される．したがって，場が $t\to-\infty$ で真空 $|0-\rangle$ の状態にあったとすると，$t\to+\infty$ でブラックホールの外部に生成されたエネルギー ω の粒子の数 N_ω は

$$N_\omega\equiv\langle 0-|\hat{a}_{\omega+}{}^\dagger\hat{a}_{\omega+}|0-\rangle=\int d\omega'|\beta_{\omega\omega'}|^2 \tag{6.29}$$

で与えられる．すなわち粒子生成量を求めるには，$\beta_{\omega\omega'}$ を計算しないといけない．

厳密な計算は不可能であるので，幾何光学的な近似を利用する．すなわち，波動関数の重力場による散乱を無視することにする．すると，波動関数の $r\sim\infty$ における二つの成分 $e^{-i\omega v}/r$（収束波）と $e^{-i\omega u}/r$（膨張波）は，それぞれ $v=$ 一定，$u=$ 一定にそって振幅と位相を一定に保って伝播することになる．ただし $r=0$ では互いに入れ替わる．さらに，異なった ω の波動関数を十分狭い ω の幅で重ね合わせて波束を作ると，$t\to-\infty$ での膨張波 $e^{-i\omega u_-}/r$ および $t\to+\infty$ での収束波 $e^{-i\omega v_+}/r$ の寄与は非常に小さくなるので，このような波束を作ることを前提として，これら二つの項を無視してよい．したがって，結局 $v_-=$ 一定の入射光線が原点で反射した後どの $u_+=$ 一定の光線に移るかを決定すればよいことになる．

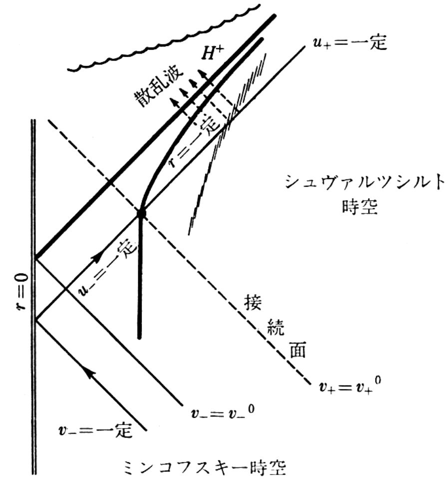


図 6.3

事象の地平面 H^+ に突入する時点では星の内部での重力場は十分弱いと考えられるので，$v_+{}^0$ を星の表面が H^+ を横切るときの v_+ の値として，図 6.2 の時空を，図 6.3 のようにミンコフスキー時空とシュバァルツシルト時空を $v=v_+{}^0$ でつないでできる時空で近似してよいであろう．この時空では $v=v_+{}^0$ 面上で r が連続につながっていることが必要であるので，u_+ と u_- の間に

$$u_+-v_+{}^0=-2r-2r_s\ln|r/r_s-1|$$

$$\simeq -2r_s-2r_s\ln\left|\frac{v_+{}^0-u_-}{r_s}-1\right| \qquad : \quad r\sim r_s \qquad (6.30)$$

の関係があることがわかる．入射波 $v_-=$ 一定 は H^+ を横切らない限り原点で反射して $u_-=v_-+(v_-$ によらない定数$)=$一定という膨張波へ変わるので，結局

$$u_+=-2r_s\ln(v_-{}^0-v_-)/r_s+c \qquad (c \text{ は定数}) \qquad : \quad r\sim r_s \qquad (6.31)$$

となる．

この関係を使うと，式 (6.27) より $\beta_{\omega\omega'}$ は

$$\beta_{\omega\omega'}\simeq\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\int_{-\infty}^{v_-{}^0}\mathrm{d}v_-\,\mathrm{e}^{-i\omega'v_-+i\omega u_+}$$

$$\simeq\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\int_{-\infty}^{v_-^0}\mathrm{d}v_-\exp\left\{-i\omega' v_- -2ir_s\omega\ln\frac{v_-^0-v_-}{r_s}+c\right\} \quad (6.32)$$

と表される．ここで $v_->v_-^0$ の部分がないのは，その部分はブラックホールに入ってしまい $\varphi_{\omega+}$ に寄与しないためである．式 (6.32) の被積分関数は v_- の複素平面の下半面で正則なので，積分路 $v_-=v_-^0$ を中心として時計と反対回りに 180° 回転させることができる．すると ln の項より $-2ir_s\omega\times(-i\pi)$ が出てくるので

$$\beta_{\omega\omega'}\simeq\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,\mathrm{e}^{-2\pi\omega r_s-2i\omega' v_-^0}\int_{-\infty}^{v_-^0}\mathrm{d}v_-\exp\left\{i\omega' v_- -2ir_s\omega\ln\frac{v^0_- -v_-}{r_s}+c\right\}$$

$$(6.33)$$

ところが右辺は積分の前の指数因子を別にすれば，$\alpha_{\omega\omega'}$ に対する表式と一致している．したがって

$$|\beta_{\omega\omega'}|^2=\mathrm{e}^{-4\pi\omega r_s}|\alpha_{\omega\omega'}|^2 \quad (6.34)$$

という関係を得る．

これまで波動関数の振幅の変化を無視してきたが，実際は，波動関数が H^+ の近傍で散乱される．その結果，最初，振幅 1 より正確には $N(\varphi_{\omega-},\ \varphi_{\omega-})=1$ で $r=0$ に収束する波も再び $r\to\infty$ に広がる際には，散乱波がブラックホールに吸収されて $N(\varphi_{\omega+},\ \varphi_{\omega+})=\Gamma_\omega<1$ となる．このことを考慮すると，式 (6.27) より

$$\int(|\alpha_{\omega\omega'}|^2-|\beta_{\omega\omega'}|^2)\,\mathrm{d}\omega'=\Gamma_\omega \quad (6.35)$$

が得られる．これを式 (6.34) と合わせると，式 (6.29) より最終的に次のような粒子生成量に対する評価が得られる：

$$N_\omega\equiv\frac{\Gamma_\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_BT}-1} \quad : \quad k_BT\equiv\frac{\hbar}{4\pi r_s}=\frac{M_{pl}^2}{8\pi M} \quad (6.36)$$

ここで k_B はボルツマン定数，$M_{pl}=(\hbar c/G)^{1/2}=2\times10^{-5}$ g はプランク質量である．この式は，温度 T のプランク分布の形をしている．したがって，無限遠の観測者は，ブラックホールがあたかも温度 T の黒体であるかのような定常的な熱輻射を観測することになる[15)]．

6·3　ブラックホールの蒸発

前節で求めたブラックホールからの輻射は定常的である．したがって，そのままでは放出される全エネルギーは無限大となってしまい大変なことになる．この見かけのエネルギーカタストロフは，量子場の重力場への反作用を無視したために起こったものである．

実際，ブラックホールの内部の粒子状態を調べてみると，粒子生成はブラックホールの内部と外部に一個ずつ対で起こることがわかる[41]．ところが，内部に放出された粒子のエネルギーは無限遠から見ると負で，粒子対の全エネルギーはゼロであることが示される．負のエネルギーの粒子というのは一見奇妙であるが，H^+ の内側では重力の負のポテンシャルエネルギーが静止質量のエネルギーを上回る（$-g_{00}=1-\dfrac{r_s}{r}<0$）ためにこのようなことが可能になる．

この負の粒子の吸収によってブラックホールの質量がしだいに減少することを考慮すると，全放出エネルギーは有限になる．さらにブラックホールは有限な時間で蒸発してなくなってしまうことも示される．実際，熱輻射の公式よりブラックホールの質量の時間変化は

$$\dot{M}=-4\pi r_s{}^2 f\frac{\pi^2(k_{\mathrm{B}}T)^4}{60\hbar^3}=-\frac{f}{15360\pi}\frac{M_{pl}{}^4}{\hbar}\frac{1}{M^2} \qquad (6.37)$$

で与えられる．f は Γ_ω による補正を表す O(1) の量である．この式は簡単に積分できて

$$M^3=M_0{}^3-\frac{f}{5120\,\pi}\frac{M_{pl}{}^4}{\hbar}\,t \qquad (6.38)$$

となる．M_0 は $t=0$ での質量である．したがって，M は時間

$$\tau=\frac{5120\pi}{f}\,t_{pl}\left(\frac{M}{M_{pl}}\right)^3 \qquad (6.39)$$

でゼロとなってしまう．もっとも通常の星からできるブラックホール（$M\sim M_\odot$）に対しては $\tau\sim10^{64}$ y となり，宇宙年齢（$\sim10^{10}$ y）をはるかに超えてしまう．$M\sim10^{15}$g でやっと τ は宇宙年齢程度となる．したがってブラックホールの蒸発は，現実には星の重力崩壊以外でできた小さな質量をもつブラックホールに対してのみ重要となる．このような小さなブラックホールが宇宙の初期に

大量に生み出される可能性は否定できない[42,53]．

6・4 量子論的効果による宇宙検閲仮定の破れ

時空構造の変化という視点から見ると，ブラックホールの蒸発は非常に重大な現象を引き起こす．負の粒子の吸収によってブラックホールが蒸発するということは，事象の地平面 H^+ の表面積が有限な時間でゼロとなることを意味している．ところがこのとき，H^+ によってそれまで隠されていた時空の特異点（$r=0$）が外に顔を出してしまうのである（図6.4参照）．この現象は球対称な場合に限らず一般に起こることが示されている[44,45]．

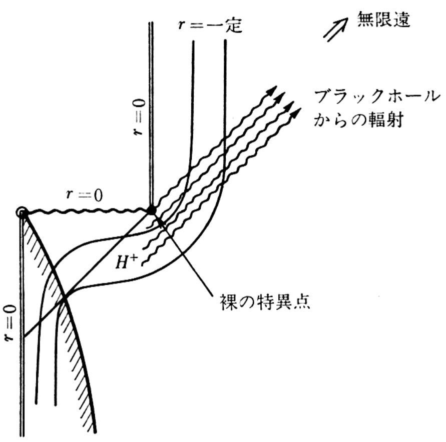


図 6.4 蒸発するブラックホールを表す時空構造

このように，古典論の世界で宇宙検閲仮定が成立していて，重力のカタストロフィックな性格が事象の地平面で隠されたとしても，量子効果はそれを再びあばき出してしまうのである．

この全く新しいタイプの時空の特異点が，果たしてどのような性格のものかは現在のところ全くわかっていない．特にこの特異点の存在を正確に考慮した場合，前節で述べたようにブラックホールはそれが本来もっていたエネルギーを放出するだけですむのか，それとも負のエネルギーをもつ特異点が発生してエネルギーカタストロフが起こるのかという問題に対して満足のゆく解答は与えられていない[46,47]．これに関連して，プランク長（$=(\hbar G/c^3)^{1/2}\simeq1.6\times10^{-33}$ cm）程度の世界では，時空構造自体の量子論的ゆらぎによってブラックホールの形成と蒸発が絶えず起こる結果，通常の量子論の基本原理そのものが成立しなくなるのではないかという理論がホーキングによって出されている[48~51]．

7章 結　語

本稿では，一般相対論のもつ時空の動力学的性格によって引き起こされる諸現象の中で，事象の地平面と時空の特異点の発生という最も典型的な現象に限って話を進めてきた．もちろんそれらは，一般相対論が重要となる諸現象のほんの限られた側面を見ているにすぎないが，一般相対論が非常に興味深い理論であると同時に困難な未解決問題を多くかかえており，しかもそれらを解決することが大きな現実的重要性をもつことは十分理解していただけたと思う．

これらの諸問題を解決する努力は現在も続けられている．最後に，それらのうち本文中では述べなかったごく最近の試みについて触れておこう．

その一つは，数値的相対論（Numerical relativity ないし Computational relativity）という新しい研究方法の登場である．これは，近年の大型計算機の能力の急速な向上を背景として，数値シミュレーションによってアインシュタイン方程式を解こうとする試みである．もちろん現時点では，スーパーコンピューターをもってしても十分な3次元計算をできるまでにはなっていないが，宇宙検閲仮定の検証の方法として有望視されている[52]．

第二のものは，重力の量子論からのアプローチである．6章で述べたように，時空を古典的に保ったまま物質の相対論的量子効果を考慮する（準古典近似）と，裸の特異点の発生という新たな問題が生ずる．最近，ホロヴィッツ（Horowitz）らによって，準古典近似はこれ以外にも重要な困難を伴っていることが指摘されている[53]．すなわち，この近似に従うと，ミンコフスキー時空自体が量子効果によって不安定になるのである．これらの困難は，一般相対論の枠組みで物質の量子効果を研究するためには，重力場自身の量子論を建設し

なければならないことを示している．さらに最近，素粒子論において急速に発展した，重力を含む全相互作用を統一する理論に関する研究は，矛盾のない重力の量子論を作ることが素粒子の高エネルギーにおける相互作用を決定する上でも重要であることを示唆している[54~56]．残念ながら現在のところ，満足のゆく重力の量子論は全く存在しないが，すでに3章および6章で触れたようにいくつかの興味深い進展が見られる[28,48~51]．

第三は，高次元時空を利用した統一理論（Kaluza-Klein 型理論）の研究である[57~59]．この理論は，上述の問題を解決する試みではないが，一般相対論の高次元への拡張になっており，時空の動力学的側面が新たな物理的役割を果たすものとして興味深い．

以上のような新しい試みが，今後どのような成果をもたらしてくれるか非常にたのしみである．

参考文献

1) K. Schwarzschild : Sitz. Preus. Akad. Wiss, 424 (1916)
2) G. D. Birkhoff : Relativity and Modern Physics (Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1923)
3) J. R. Oppenheimer & G. Volkoff : *Phys. Rev.*, **55**, 374 (1939)
J. R. Oppenheimer & H. Snyder : *Phys. Rev.*, **56**, 455 (1939)
4) A. Friedmann : *Z. Physik*, **10**, 377 (1922)
5) R. Penrose : *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 57 (1965)
6) S. W. Hawking : *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A300**, 187 (1967)
7) S. W. Hawking & R. Penrose : *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A314**, 529 (1970)
8) R. M. Schoen & S.-T. Yau : *Comm. Math. Phys.*, **65**, 45 (1979) ; *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 369 (1982)
9) E. Witten : *Comm. Math. Phys.*, **80**, 381 (1981)
10) J. M. Nester : *Phys. Lett.*, **83A**, 241 (1981)
11) M. Ludvigsen & V. A. Vickers : *J. Phys.*, **A14**, L389 (1982); **A15**, L67 (1981)
12) G. T. Horowitz & M. J. Perry : *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 371 (1982)
13) G. W. Gibbons, S. W. Hawking, G. T. Horowitz & M. J. Perry : *Comm. Math. Phys.*, **88**, 295 (1983)
14) L. Parker : *Phys. Rev.*, **183**, 1057 (1969); *Phys. Rev.*, **D3**, 346 (1971)
15) S. W. Hawking : *Comm. Math. Phys.*, **43**, 199 (1975)
16) Landau & Lifshitz : 場の古典論（広重徹，恒藤敏彦訳，東京図書，1964）
17) S. Weinberg : Gravitation and Cosmology (John Wiley, New York, 1972)
18) C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler : Gravitation (W. H. Freeman and Company, 1973)
19) C. C. Gillispie : 科学思想の歴史（島尾永康訳，みすず書房，1965），p. 88 (1960)
20) 宇宙物理学（現代物理学の基礎 12），岩波書店（1973）
21) Landau & Lifshitz : 統計物理学（富永五郎他訳，岩波書店，1958）
22) G. Baym & C. Pethick : *Ann. Rev. Astron. Astrophys*, **17**, 415 (1979)
S. L. Shapiro & S. A. Teukolsky : Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars (John Wiley & Sons, New York, 1983)
23) V. Trimble : *Rev. Mod. Phys.*, **54**, 1183 (1982)
24) P. J. E. Peebles : The Large-Scale Structure of the Universe (Princeton Univ.

Press, Princeton, 1980)
25) P. Hodge : *Ann. Rev. Astron. Astrophys*, **19**, 357 (1981)
26) R. B. Partridge : in The Origin and Evolution of Galaxies, VIIth Course of the International School of Cosmology and Gravitation, eds. B. J. T. Jones & J. E. Tones, p. 121 (1983)
J. M. Uson & D. T. Wilkinson : *Astrophys. J.*, **293**, 471 (1984)
27) L. Parker & S. A. Fulling : *Phys. Rev.*, **D7**, 2357 (1973)
M. V. Fischetti, J. B. Hartle & B. L. Hu : *Phys. Rev*, **D20**, 1757 (1979)
P. A. Anderson : *Phys. Rev.*, **D28**, 271 (1983); *Phys. Rev.*, **D29**, 615 (1984)
28) J. B. Hartle & S. W. Hawking : *Phys. Rev.*, **D28**, 2960 (1983)
S. W. Hawking : *Nucl. Phys.*, **B239**, 257 (1984)
小玉英雄：素粒子論研究 **71**, C29 (1985)
29) G. W. Gibbons, S. W. Hawking & S. Siklos (eds.) : The Very Early Universe (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983)
K. Sato : in Cosmology of the Early Universe, eds. L. Z. Fang & R. Ruffini (World Scientific, Singapore), p. 165 (1984)
A. D. Linde : *Rep. Prog. Phys.*, **47**, 925 (1984)
30) S. W. Hawking & G. F. R. Ellis : The Large Scale Structure of Space-time (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973)
31) F. J. Tipler, C. J. S. Clarke & G. F. R. Ellis : in General Relativity, ed. A. Held vol. 2 (Plenum Press), p. 97 (1980)
D. Christodoulou : *Comm. Math. Phys.*, **93**, 171 (1984)
32) A. Tomimatsu & H. Sato : *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1344 (1972)
33) 小玉英雄：素粒子論研究 **66**, 317 (1983)
34) R. Geroch : in Asymptotic Structure of Spacetime, eds., F. P. Esposito & L. Watten (Plenum Press), p. 1 (1977)
35) A. Ashtekar : 文献 31) と同じ本の vol. 2, p. 37.
36) D. R. Brill & P. S. Jang : 文献 31) と同じ本の vol. 1, p. 173.
37) J. Weber & J. A. Wheeler : *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 509 (1957)
38) F. W. Hehl, P. von der Heyde & G. D. Kerlick : *Rev. Mod. Phys.*, **48**, 393 (1970)
39) J. D. Bjorken & S. D. Drell : Relativistic Quantum Mechanics (McGraw-Hill, 1964)
40) B. S. DeWitt : *Phys. Reports*, **C19**, 295 (1975)
小玉英雄：素粒子論研究 **71**, 163 (1985)
41) S. W. Hawking : *Phys. Rev.*, **D14**, 2460 (1976)

42) K. Sato, M. Sasaki, H. Kodama & K. Maeda : *Prog. Theor. Phys.*, **65,** 1443 (1981)
H. Kodama, M. Sasaki & K. Sato : *Prog. Theor. Phys.*, **68,** 1979 (1982)
43) B. J. Carr : *Astrophys. J.*, **201,** 1 (1975); *Astrophys. J.*, **206,** 8 (1976)
44) H. Kodama : *Prog. Theor. Phys.*, **62** (1979), 1434
45) R. W. Wald : Quantum Theory of Gravity, ed. S. M. Christensen (Adam Hilger Ltd, Bristol, p. 160 1984)
46) H. Kodama : *Prog. Theor. Phys.*, **63**, 1217 (1980)
47) W. A. Hiscock : *Phys. Rev.*, **D23**, 2813; 2823 (1981)
48) S. W. Hawking : *Comm. Math. Phys.*, **87**, 395 (1982); *Nucl. Phys.*, **B244**, 135 (1984)
49) T. Banks, L. Susskind & M. E. Peskin : *Nucl. Phys.*, **B244**, 125 (1984)
50) A. Strominger : *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1733 (1984)
51) J. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos & M. Srednicki : *Nucl. Phys.*, **B241,** 381 (1984)
52) T. Piran : in Gravitational Radiation, N. Druelle & T. Piran, eds., Les Houchos 1982 (North-Holland, 1983)
L. Smarr : General Relativity and Gravitation, eds. B. Bertotti et al (D. Reidel Pub. Comp, 1984)
53) G. T. Horowitz & R. M. Wald : *Phys. Rev.*, **D17**, 414 (1978)
G. T. Horowitz : *Phys. Rev.*, **D21**, 1445 (1980)
J. B. Hartle & G. T. Horowitz : *Phys. Rev.*, **D24**, 257 (1981)
54) K. S. Stelle : 文献 45) と同じ本, p. 344.
P. C. Wess : 文献 45) と同じ本, p. 356.
55) E. Witten : *Comm. Math. Phys.*, **92**, 455 (1984)
56) 小玉英雄 : 日本物理学会誌 **40,** 618 (1985)
57) M. J. Duff : *Nucl. Phys.*, **B219**, 389 (1983)
58) P. G. E. Freund : *Nucl. Phys.*, **B209**, 146 (1982)
59) P. van Nieuwenhuizen : 文献 52) と同じ本, p. 471.